CPGE 1re année

SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGENIEUR

Analyser et modéliser un système asservi

CI 02

2015-2016

PÔLE CHATEAUBRIAND JOLIOT-CURIE

Objectifs

Identifier la structure d'un système asservi

Manipuler les outils de modélisation et de représentation des systèmes linaires continus invariants

Estimer les performances des systèmes linéaires continus invariants à l'aide des caractéristiques de leur réponse à une entrée simple

Sommaire

I Chaîne fonctionnelle et système continu

Un **système automatisé** est un système qui met en œuvre de manière **autonome** des chaînes fonctionnelles. Il permet de réaliser des tâches :

- trop **complexes** ou **dangereuses** pour l'homme

Un exemple de système particulièrement autonome :

Centre d'usinage de précision

Robot d'inspection d'un cœur de centrale nucléaire

- **répétitives** et **pénibles** [1].

(1) Ces exemples mettent en œuvre des chaînes fonctionnelles dont la matière d'œuvre (position, vitesse) est une grandeur physique continue.

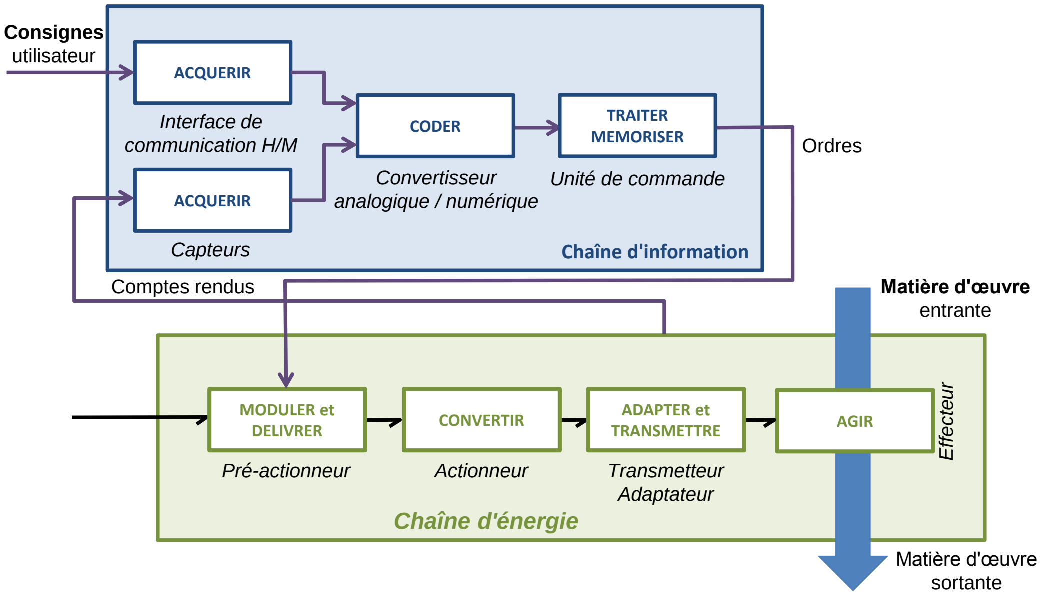
Robot soudeur

Robots guides » d'un complexe financier Santander

L'analyse passe donc par l'analyse et la modélisation des chaînes fonctionnelles.

> Analyser le **comportement d'une chaîne fonctionnelle** consiste à déterminer la **relation** entre la **consigne** de l'utilisateur et l'évolution de la **matière d'œuvre**.

Dans la description par chaîne fonctionnelle, les fonctions de communication, restitution, alimentation et stockage de l'énergie n'interviennent pas directement dans la relation recherchée. Nous allons donc déterminer un modèle du sous-ensemble suivant :



(2) les grandeurs d'entrée et de sortie peuvent être de même nature.

> Dans cette représentation,
> – la **grandeur d'entrée** est la consigne
> – la **grandeur**[2] **de sortie** , la **réponse**, est la matière d'œuvre ou une grandeur intermédiaire liée à celle-ci.
>
> Le système étudié est nommé **système continu** si les **grandeurs d'entrée** et de **sortie** sont des fonctions **continues du temps**.

II Modéliser la structure d'un système asservi par schéma-bloc

II.1 Système asservi

Un **système asservi** est un système dont :

- les grandeurs d'entrée et de sortie sont de **même nature**
- la grandeur de **sortie** doit, fonctionnellement, **suivre les évolutions** de la grandeur **d'entrée** indépendamment de **perturbations**.

Système régulateur

Un système asservi est un **système régulateur** lorsque la sortie doit prendre une valeur définie par une **consigne fixe**, ou variant ponctuellement.


Étuve thermique


Système de régulation du niveau d'eau

Exemples : Pour un régulateur de vitesse automobile, les perturbations proviennent de l'inclinaison de la route, du vent et des variations de chargement du véhicule.

Pour un régulateur de cap de navire, vent et vagues sont des perturbations.

Système suiveur

Un système asservi est un **système suiveur** si la sortie doit suivre une **consigne d'entrée variant au cours du temps** et dont l'évolution n'est pas toujours prédéterminée.


Missile à tête chercheuse


Segway

II.2 Comportement des systèmes en boucle ouverte (BO).

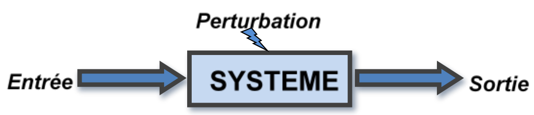
Un système est en **boucle ouverte** (non bouclé) si le système ne contrôle pas la manière dont la consigne est respectée.

La sortie d'un système en boucle ouverte dépend des perturbations si celles-ci modifient le comportement du système (relation entre l'entrée et la sortie).

Exemple : étuve thermique

Pour une étuve thermique, les perturbations proviennent de l'ouverture de la porte, de la température extérieure et des températures et quantités des aliments ou objets mis dans l'étuve.

Un système continu en boucle ouverte peut, dans une première approche, être représenté de la façon ci-contre.

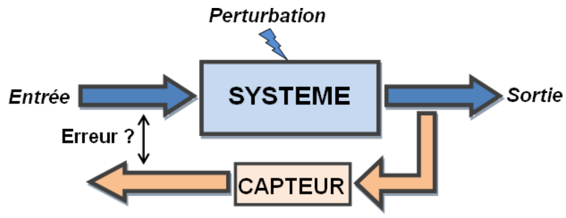


II.3 Comportement des systèmes en boucle fermée (BF)

Pour limiter l'influence des perturbations, il faut observer en permanence l'état de la sortie du système pour la modifier et la faire tendre vers la consigne donnée en entrée.

> Un système bouclé (ou en **boucle fermée**) est un système dont **la sortie est mesurée puis comparée à l'entrée**. Cette différence est appelée **erreur** ou **écart**.

Le but d'un tel système est d'**annuler en permanence l'erreur entre l'entrée et la sortie**. Pour cette raison, il comporte une **boucle de retour** comprenant un **capteur**.



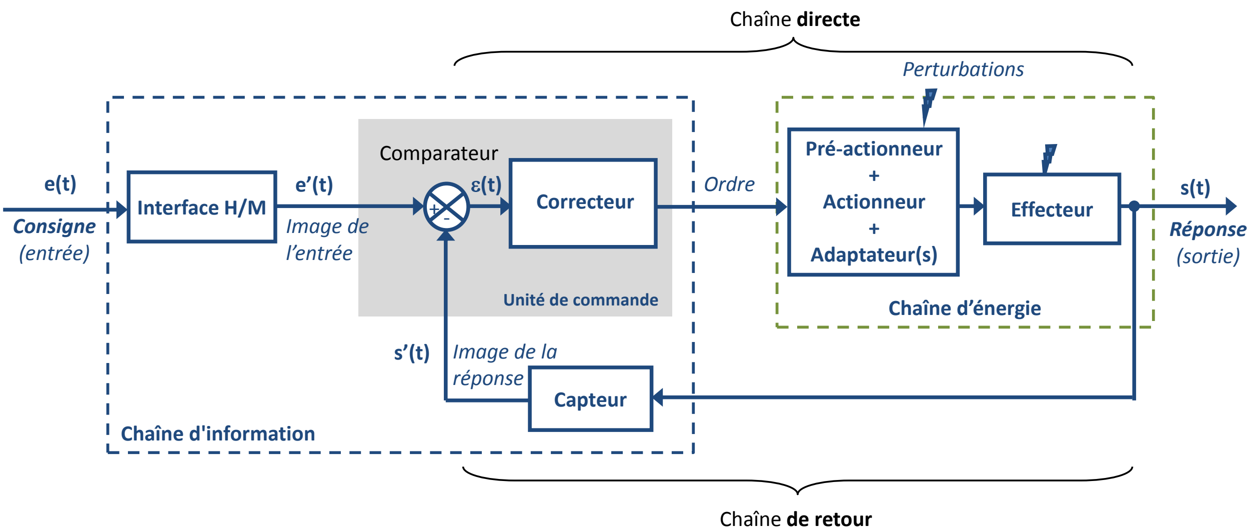
On parle alors d'un « **système asservi** » mais c'est un abus de langage, **c'est la grandeur de sortie qui est asservie à la grandeur d'entrée**. Les qualités d'un tel système seront mesurées à partir de sa capacité à produire une sortie qui suit le mieux possible la consigne d'entrée.

LES SYSTEMES ASSERVIS DU LABORATOIRE DE SII	
Cordeuse de raquettes	Asservissement de la tension du cordage
Chariot filoguidé	Asservissement de la position et de la vitesse du chariot
Bras de robot Maxpid	Asservissement de la position angulaire du bras
Pilote automatique de bateau	Asservissement du cap suivi par le bateau

II.4 Structure d'un système asservi et schéma-bloc

Chaîne directe, chaîne de retour, comparateur, erreur et image de l'erreur

La structure complète d'un système asservi est représenté par le **schéma-bloc fonctionnel** suivant.



Dans ce schéma-bloc fonctionnel, la puissance entrante au niveau du pré-actionneur n'est pas une entrée.

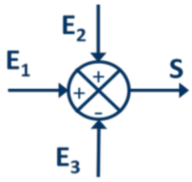
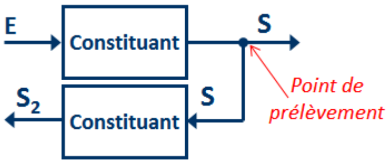
CONSTITUANT	FONCTION
Interface H/M	**Traduire la consigne** en un signal utilisable par la commande
Correcteur	**Corriger** le signal de **commande** pour améliorer les performances du système (précision – rapidité – stabilité)
Capteur	Produire une **image de la sortie**
Comparateur	**Comparer** l'image de la **sortie** et l'image de **l'entrée** (consigne). Il délivre un signal $\varepsilon(t)$, en général électrique, qui est une **image de l'erreur** $e_r(t)$. Avec : $\varepsilon(t)=e'(t)-s'(t)$ et $e_r(t)=e(t)-s(t)$.

Un système asservi est constitué de deux chaînes :

- la **chaîne directe**, entre le comparateur et le point de prélèvement du capteur, qui assure les fonctions de commande et de puissance
- la **chaîne de retour**, entre le point de prélèvement du capteur et le comparateur, qui assure la fonction de mesure du signal de sortie.

Blocs, comparateur et point de prélèvement

Les trois éléments de base du schéma-bloc sont :

le **bloc** qui représente un constituant du système asservi (interface H/M, capteur, actionneur,...). Ce bloc comporte **une seule entrée** et une seule **sortie**. Il est **orienté** par une relation de causalité.	 Ex : un moteur électrique peut être vu comme un bloc avec une tension de commande en entrée et une vitesse de rotation en sortie. 
Le **comparateur** (soustracteur ou sommateur) qui comporte plusieurs entrées mais une seule sortie. *Ces entrées peuvent être additionnées ou soustraites.*	 $\boxed{S = E_1 + E_2 - E_3}$
Le **point de prélèvement** qui prélève, sans le modifier, le signal en un point.	

III Caractériser les performances d'un système continu

Un exemple de système rapide, précis et stable :

Afin de répondre aux mieux aux besoins de l'utilisateur, un système continu doit présenter des performances les plus proches possibles de celles définies dans le **cahier des charges**.

Les **critères** sont :

- la **stabilité**, propriété de convergence temporelle (et asymptotique) vers un **état d'équilibre**
- la **rapidité**, caractérisant la promptitude de réaction aux variations de l'entrée des systèmes stables
- la **précision**, aptitude des systèmes stables à présenter une sortie qui tende vers la valeur attendue.

Il est impératif que ce système de correction de la vue par laser soit assez rapide et assez précis pour suivre les mouvements de la pupille.

III.1 Signaux test pour évaluer les performances

Pour définir et évaluer précisément ces critères, il faut **procéder à des tests** soit sur le **système réel,** soit **en simulation(1).** En pratique, on utilise quatre types d'entrée qui permettent de mieux connaître les réactions du système, et donc ses **performances**.

(1) Dans ce cas, il faut modéliser le système et les entrées qui peuvent lui être appliquées.

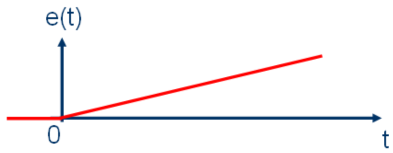
(2) fonction de Heaviside si l'amplitude de l'échelon est unitaire (E_0=1).

Pour tous ces signaux et par convention : *e(t)=0* pour t<0

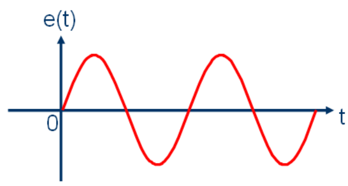
L'échelon : entrée constante d'amplitude E_0

***L'impulsion* :** entrée très brève

La rampe : entrée linéairement variable



La sinusoïde



Une fois ces signaux test appliqués, l'objectif est d'obtenir, à l'aide de **réglage**, le **meilleur compromis** entre les différents critères de performances.

III.2 Caractériser la stabilité par les dépassements

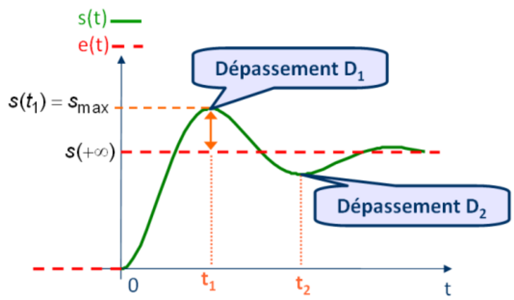
> Un système est **stable** si, pour une entrée en échelon, la grandeur de sortie **converge** vers une valeur constante, dite **valeur finale**.
>
> La **valeur finale**, lorsqu'elle existe, correspond à la **valeur de sortie** du système pour un **temps** suffisamment **grand** ("tendant vers l'infini"). Notée : $s(+\infty)$ ou $s_{+\infty}$

Soit s_0 la valeur initiale de la grandeur de sortie.

La **variation totale** de la grandeur de sortie est $\Delta s_{+\infty} = s_{+\infty} - s_0$, notée aussi $\Delta s(+\infty)$.

> Une réponse présente un **dépassement** lorsque la grandeur de sortie "coupe" la **valeur finale**. La courbe de sortie présente un extrémum.
>
> la stabilité est généralement caractérisée par le **nombre de dépassements** et/ou **l'amplitude du premier dépassement** (le plus critique), noté ***D_1*** pour une entrée en **échelon**.
>
> Le **dépassement absolu** d'ordre *k* vaut $\boxed{D_k = \left|s(t_k) - s(+\infty)\right|}$
>
> Le **dépassement relatif** d'ordre *k* vaut $\boxed{D_{k\%} = \left|\dfrac{D_k}{\Delta s(+\infty)}\right|}$.

Système avec dépassement :



Pour certains systèmes, il est impératif qu'il n'y ait aucun dépassement.

Exemple : l'amarrage du module ATV à la station ISS (risque de collision).

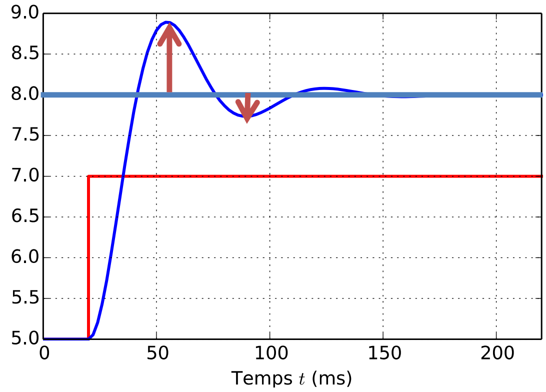
Application :

A1 - Estimer D_1, $D_{1\%}$, D_2, $D_{2\%}$ et le nombre de dépassements

D_1=|8,9-8|=0,9
et $D_{1\%}$=0,9/3=0,3=30%

D_2=|7,7-8|=0,3
et $D_{2\%}$=0,3/3=0,1=10%

4 dépassements visibles « à l'œil ».



III.3 Caractériser la rapidité par le temps de réponse à 5%

Un exemple de système ou le critère de rapidité est prépondérant :

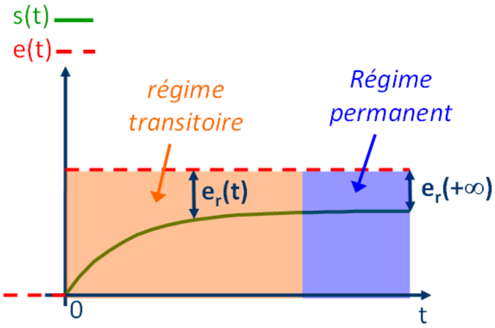
? à 5% est atteint lorsque la sortie rentre dans le « tube des 5% » et n'en sort plus !

La **rapidité** est évaluée, pour une **entrée en échelon** et un système stable, par le temps que met le système pour que la **sortie soit proche de sa valeur finale**.

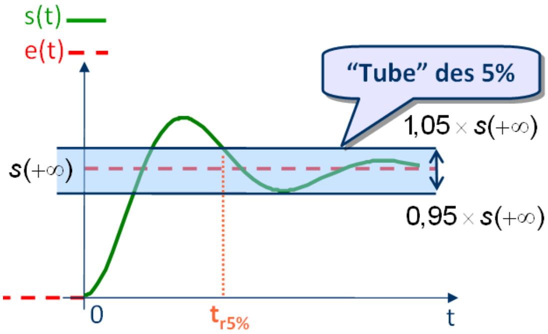
> Par convention, la **rapidité** est caractérisée par **le temps de réponse à 5%** noté ***$tr_{5\%}$.***
>
> Le temps de réponse à 5% est la **durée** mise par la sortie pour **atteindre la valeur finale**, **à ± 5%** de la **variation totale de la sortie**, et ne plus s'en écarter d'avantage.

Le "tube à 5%" est défini par l'intervalle : $\left[s_{+\infty} - 0{,}05\,\Delta s_{+\infty}, s_{+\infty} + 0{,}05\,\Delta s_{+\infty}\right]$

Système sans dépassement :



Système avec dépassement :



Application : Le graphique ci-contre représente la réponse d'un système à une consigne dite "en échelon".

A2 - Déterminer le temps de réponse à 5%.

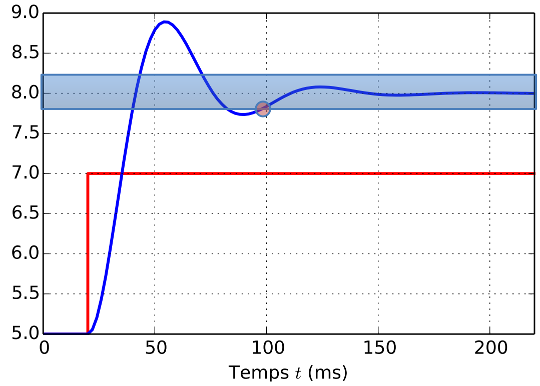
La valeur finale est : $s(+\infty) = 8$

La variation totale de la sortie vaut 3.

Le "tube des 5%" correspond à l'intervalle [8-3x0,05 ; 8+3x0,05], soit [7,85 ; 8,15].

Le signal de sorti reste dans le tube à partir de t=100 ms. La sollicitation débutant à t=20 ms, on obtient :

$tr_{5\%}$=100-20=80 ms



III.4 Caractériser l'erreur par la précision

L'erreur n'est définie que pour un **système stable** ayant des grandeurs d'entrée et de sortie **de même nature** et comparables.

L'**erreur,** ou l'**écart**, notée $e_r(t)$ est la différence entre **valeur souhaitée** (=entrée) et la **valeur** réellement **atteinte** (=sortie) ***:***

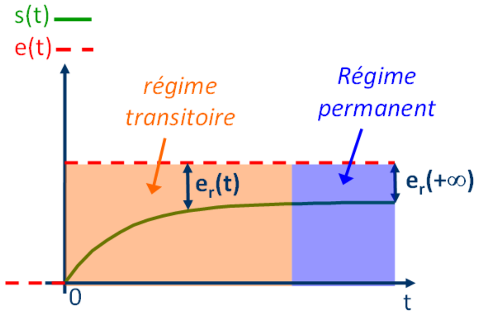
$$e_r(t) = e(t) - s(t) \text{ avec } e(t)\text{: entrée et } s(t)\text{: sortie}$$

Le **régime permanent** est établi lorsque **l'erreur n'évolue** plus au cours du temps, soit **pour un temps suffisamment grand**, "tendant vers l'infini".

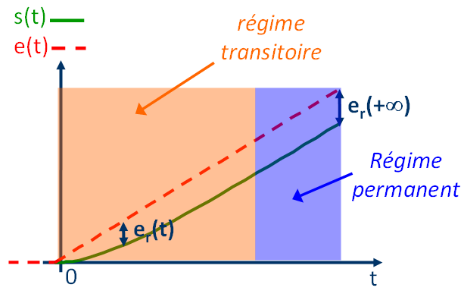
La **précision** est évaluée par **l'erreur en régime permanent**, appelée aussi **erreur statique** : $e_r(+\infty) = e(+\infty) - s(+\infty)$

On ne dira jamais que le temps de réponse est rapide, ou que l'erreur est précise ! Les critères s'évaluent par des chiffres qui peuvent être plus faibles ou plus grands que d'autres…

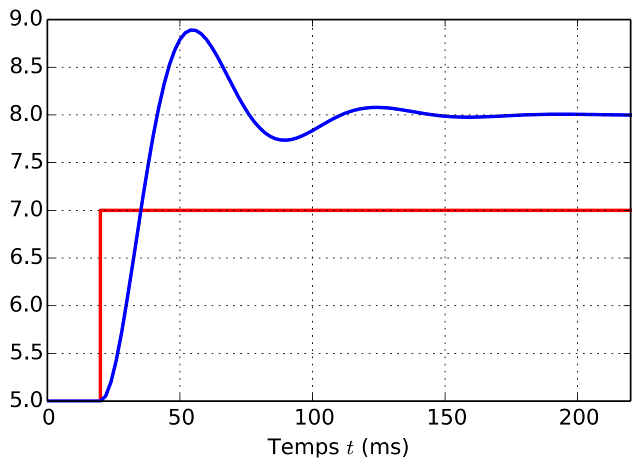
On parlera d'**erreur de position** (ou erreur indicielle) lorsque **l'entrée est constante** en régime permanent.



On parlera d'**erreur de poursuite** (ou erreur de suivi) lorsque **l'entrée varie linéairement** en régime permanent.



Application : Le graphique ci-contre représente la réponse d'un système à une consigne dite "en échelon".



A3 - Déterminer approximativement l'instant de début du régime permanent.

Après 190 ms, la réponse est sensiblement constante.

A4 - Déterminer l'erreur (statique ou de poursuite).

La consigne est constante : erreur statique. On suppose que les grandeurs d'entrée et de sortie sont comparables.

$e_r = e(+\infty) - s(+\infty)$ =7-8=-1

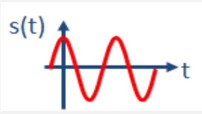
IV Modéliser un SLCI par une fonction de transfert dans le domaine de Laplace

Pour que le schéma-bloc fonctionnel puisse être utilisé en simulation sous cette forme, il faut pouvoir caractériser le comportement de chaque composant indépendamment des autres. Ceci est réalisé, sous certaines hypothèses, par les fonctions de transfert.

IV.1 Modèle utilisé : Système Linéaire, Continu et Invariant – SLCI

La modélisation du comportement d'un composant consiste à chercher la **relation** entre une ou plusieurs grandeurs **d'entrée** et une grandeur de **sortie**, appelée aussi **réponse**.

Le **modèle** utilisé pour caractériser le comportement des composants vérifie les hypothèses des **Systèmes Linéaires Continus Invariants** (SLCI).



(1) L'usure de certaines pièces, par exemple, peut se traduire par des évolutions des lois de comportement au cours du temps, qui ne sont pas prises en compte.

(2) La limite de vitesse d'un moteur est une non-linéarité, par exemple.

Dans ces cas, il faut restreindre le domaine d'étude et/ou faire une linéarisation autour d'un point de fonctionnement

Un système de type **SLCI**, vérifie les hypothèses suivantes :

- les grandeurs d'entrée et de sortie évoluent de manière **continue** avec le temps,
- le système est **invariant**, c'est-à-dire qu'il reste identique et valable à chaque instant durant la période d'étude (1),
- le système est **linéaire** (2), c'est-à-dire que la sortie est une combinaison linéaire des réponses aux signaux d'entrée.

Les **SLCI** sont caractérisés par un **système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants** de la forme :

$$a_n\frac{d^ns}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}s}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{ds}{dt}+a_0s(t)=b_m\frac{d^me}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}e}{dt^{m-1}}+\ldots+b_1\frac{de}{dt}+b_0e(t)$$

$e(t)$: *entrée* et $s(t)$: *sortie*

n est **l'ordre** du système.

Pour des raisons liées à la causalité (le comportement d'un système dépend du passé, pas du futur), les systèmes réels étudiés imposent m≤n. Cette propriété permet de définir, à priori, les entrées et la sortie.

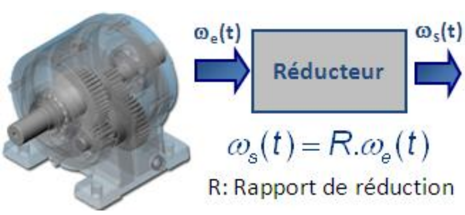
Le modèle peut être obtenu par application des lois de la physique ou expérimentalement.

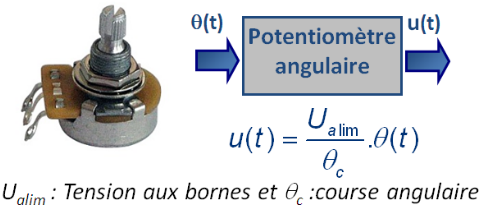
Un **modèle de connaissance** est un modèle mathématique déterminé par application de lois et principes de la **physique**.

Un **modèle de comportement** est déterminé à partir de réponses **expérimentales** à des signaux tests.

De nombreux systèmes, tels les réducteurs de vitesse, potentiomètre, capteurs, résistance électrique…, sont modélisés par une simple **relation de proportionnalité** entre l'entrée et la sortie, appelé **gain du constituant**.

Exemples avec modèle de connaissance proportionnelle





IV.2 Limites de la représentation par équations différentielles

Exemple : Considérons un **moteur à courant continu**.

La grandeur d'entrée est une tension d'alimentation du moteur. La grandeur de sortie est la vitesse de rotation du moteur.

Les équations du modèle de connaissance usuel, sans perturbations, sont données ci-dessous.

Les équations proviennent des lois physiques suivantes :

(1) loi des mailles

(2) et (3) électro-magnétisme

(4) loi de Newton pour un solide en rotation

Équations fondamentales d'un Moteur à Courant Continu (MCC)		
$u(t)=e(t)+R\cdot i(t)+L\dfrac{di(t)}{dt}$	(1)	$u(t)$: tension aux bornes du moteur
$e(t)=k_e\cdot\omega(t)$	(2)	$i(t)$: intensité du courant du moteur
$c(t)=k_c\cdot i(t)$	(3)	$\omega(t)$: vitesse de rotation du moteur
$J\dfrac{d\omega(t)}{dt}=c(t)$	(4)	$c(t)$: couple du moteur
		$e(t)$: f.e.m
		J, k_e, k_c et L : caractéristiques du moteur

Les équations (3) et (4) permettent d'obtenir l'intensité en fonction de la vitesse de rotation du moteur : $i(t)=\dfrac{J}{k_c}\dfrac{d\omega(t)}{dt}$. Le modèle étant invariant, J et k_c sont des constantes et $\dfrac{di(t)}{dt}=\dfrac{J}{k_c}\dfrac{d^2\omega(t)}{dt^2}$.

En remplaçant l'intensité dans la première équation on obtient une équation différentielle (du second ordre), caractéristique du moteur :

$$k_e\,\omega(t)+\frac{JR}{k_c}\frac{d\omega(t)}{dt}+\frac{JL}{k_c}\frac{d^2\omega(t)}{dt^2}=u(t)\ .$$

Cette équation caractérise le comportement du composant. Cependant, on recherche une représentation indépendante de $u(t)$ et de $\omega(t)$.

Les équations différentielles d'un modèle de connaissance ou de comportement permettent de caractériser le comportement d'un SLCI. Mais elles ne permettent pas de relier de façon « simple » la sortie en fonction de l'entrée, ni de caractériser le comportement du système uniquement par ses paramètres et indépendamment des grandeurs d'entrée et de sortie. La transformée de Laplace donne une réponse à ce problème.

IV.3 La transformée de Laplace

Définition

(1) L'ingénieur a pour pratique d'étudier l'effet d'une cause qu'il situe à la date t=0. La cause précédant toujours l'effet, la transformée de Laplace n'est déie que pour des fonctions dites « causales ».

Soit $f(t)$ une fonction réelle d'une variable réelle telle que $f(t)=0$ pour $t<0$ (1). On définit sa transformée de Laplace $L\left[f(t)\right]$ comme l'unique **fonction** $F(p)$ **de la variable complexe** p **telle que :**

$$f(t)\xrightarrow{L[f(t)]}F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)\cdot e^{-pt}\cdot dt$$

Domaine temporel Domaine symbolique (ou de Laplace)

La transformation de Laplace permet de transformer les équations différentielles en polynômes, de définir les fonctions de transfert, de représenter par schéma-bloc un système et de calculer simplement la valeur finale !

La transformée de Laplace inverse existe. Elle est bi-univoque. Ces propriétés permettent de résoudre les équations différentielles linéaires invariantes de façon simple. Nous ne l'utiliserons pas dans ce contexte.

Propriétés de la transformée de Laplace

Les propriétés qui suivent sont fondamentales car elles permettent de calculer facilement les transformées de Laplace des équations du modèle de connaissance.

Elles sont donc à connaître parfaitement.

LINEARITE		$L[\alpha \cdot f(t)+\beta \cdot g(t)]=\alpha \cdot F(p)+\beta \cdot G(p)$
	En particulier	$L[f(t)+g(t)]=F(p)+G(p)$ et $L[k \cdot f(t)]=k \cdot F(p)$
DERIVATION	dérivée 1re	$L\left[\dfrac{df(t)}{dt}\right]=p\,F(p)$ à conditions initiales nulles
	dérivée 2e	$L\left[\dfrac{d^2 f(t)}{dt^2}\right]=p^2\,F(p)$ à conditions initiales nulles
		$L\left[\dfrac{d^n f}{dt^n}\right]=p^n \cdot F(p)$ à conditions initiales nulles
INTEGRATION		$L\left[\int f(t)\cdot dt\right]=\dfrac{F(p)}{p}$ à conditions initiales nulles

Les **conditions initiales sont supposées nulles** lorsque le système est supposé **au repos** pour t<0. C'est-à-dire, si la fonction et ses dérivées sont nulles pour t=0 :

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=...=0$$

C'est la **condition de Heaviside**.

La connaissance d'une dizaine de transformées de Laplace usuelles d'une part et de quelques propriétés d'autre part, permet de calculer pratiquement n'importe quelle transformée de Laplace.

Application : Déterminer la transformée de Laplace de l'équation différentielle suivante dans les conditions de Heaviside : $5\cdot\dfrac{d^2\theta(t)}{dt^2}+3\cdot\dfrac{d\theta(t)}{dt}+2\cdot\theta(t)=v(t)$

A5 - lorsque les conditions initiales sont nulles,

Si $\theta(t)\xrightarrow{L}\Theta(p)$, alors, avec les conditions initiales nulles :

$\dot{\theta}(t)\xrightarrow{L}p\,\Theta(p)$ et $\ddot{\theta}(t)\xrightarrow{L}p^2\,\Theta(p)$

d'ou la transformée : $5p^2\,\Theta(p)+3p\,\Theta(p)+2\Theta(p)=V(p)$

soit encore : $\Theta(p)\left[5p^2+3p+2\right]=V(p)$

Transformées de Laplace usuelles

Ces transformées de Laplace des fonctions les plus fréquemment utilisées dans l'étude des SLCI, sont ***à connaître par cœur*** : **Pour t<0, f(t)=0.**

$f(t)$	$\delta(t)$	1	t	$e^{-a\cdot t}$	$t\cdot e^{-at}$
$F(p)$	1	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1}{p^2}$	$\dfrac{1}{p+a}$	$\dfrac{1}{(p+a)^2}$

Il ne faut surtout pas oublier que les expressions fournies dans ces tables ne sont valables que pour t≥0 et que toutes les fonctions que nous utilisons sont nulles pour t<0 !

Attention : $L[f(t)\times g(t)]$ **n'est pas égale à** $L[f(t)]\times L[g(t)]$ **!**

Application : Transformée d'un échelon

A6 - Représenter la courbe temporelle d'un échelon d'amplitude E et déterminer sa transformée de Laplace.

La fonction est non nulle pour t≥0 : $f(t)=E=E\cdot 1$

d'où $F(p)=L[E\cdot 1]=E\cdot L[1]=\dfrac{E}{p}$

IV.4 Modéliser un SLCI par une fonction de transfert

Exemple du moteur à courant continu

L'équation différentielle obtenue est : $u(t) = k_e\,\omega(t) + \dfrac{JR}{k_c}\dfrac{d\omega(t)}{dt} + \dfrac{JL}{k_c}\dfrac{d^2\omega(t)}{dt^2}$

Notons $U(p)$ la transformée de Laplace de $u(t)$ et $\Omega(p)$ celle de $\omega(t)$.

Si les conditions initiales sont nulles, $L\left[\dfrac{d\omega(t)}{dt}\right] = p\,\Omega(p)$ et $L\left[\dfrac{d\omega^2(t)}{dt^2}\right] = p^2\,\Omega(p)$

L'équation différentielle, dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$L[u(t)] = L\left[k_e\,\omega(t) + \frac{JR}{k_c}\frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{JL}{k_c}\frac{d^2\omega(t)}{dt^2}\right] = k_e\,L[\omega(t)] + \frac{JR}{k_c}L\left[\frac{d\omega(t)}{dt}\right] + \frac{JL}{k_c}L\left[\frac{d^2\omega(t)}{dt^2}\right] = k_e\,\Omega(p) + \frac{JR}{k_c}p\,\Omega(p) + \frac{JL}{k_c}p^2\,\Omega(p)$$

Soit : $U(p) = \left[k_e + \dfrac{JR}{k_c}p + \dfrac{JL}{k_c}p^2\right]\Omega(p)$

On peut alors écrire la relation, dans le domaine de Laplace, entre la sortie et l'entrée sous la forme :

$$\Omega(p) = \frac{1}{k_e + \dfrac{JR}{k_c}p + \dfrac{JL}{k_c}p^2}U(p)$$

Le terme reliant la sortie à l'entrée est caractéristique du comportement du système et s'exprime uniquement en fonction de la variable symbolique p et des paramètres du système. Ce terme est la **fonction de transfert du moteur à courant continu**.

Soit $H(p)$ la fonction de transfert du moteur à courant continue : $H(p) = \dfrac{1}{k_e + \dfrac{JR}{k_c}p + \dfrac{JL}{k_c}p^2}$.

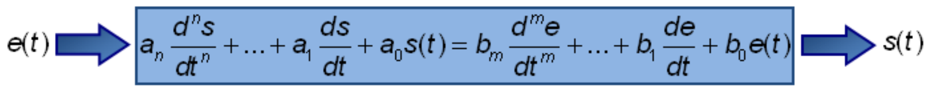
Le système se représente sous une des formes suivantes :

avec $\Omega(p) = H(p) \cdot U(p)$

sortie — fonction de transfert — entrée

Fonction de transfert à conditions initiales nulles

Soit le modèle traduisant la relation entre l'entrée $e(t)$ et la sortie $s(t)$ d'un SLCI sous forme d'une équation différentielle :



En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de cette équation et **en considérant les conditions initiales nulles**, on a :

$$a_n \cdot p^n \cdot S(p) + \ldots + a_1 \cdot p \cdot S(p) + a_0 \cdot S(p) = b_m \cdot p^m \cdot E(p) + \ldots + b_1 \cdot p \cdot E(p) + b_0 \cdot E(p)$$

Soit : $$\left[a_n \cdot p^n + \ldots + a_1 \cdot p + a_0\right]S(p) = \left[b_m \cdot p^m + \ldots + b_1 \cdot p + b_0\right]E(p)$$

d'où : $$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\left[b_m \cdot p^m + \ldots + b_1 \cdot p + b_0\right]}{\left[a_n \cdot p^n + \ldots + a_1 \cdot p + a_0\right]} = \frac{\sum_0^m b_i \cdot p^i}{\sum_0^n a_i \cdot p^i}$$

On appelle fonction de transfert cette fraction.

(1) on l'appelle aussi « transmittance » du système.

La **fonction de transfert**(1) caractérise un **SLCI** de façon indépendante de l'entrée qui lui est appliquée. Elle ne dépend que de la variable symbolique p et des paramètres du système.

La fonction de transfert est une **fraction de deux polynômes** de variable p.

Si $H(p)$ est une fonction de transfert, $\boxed{S(p)=H(p)\cdot E(p)}$

$$E(p) \rightarrow \boxed{H(p)} \rightarrow S(p)$$

Forme canonique d'une fonction de transfert : gain statique, ordre et classe, pôles et zéros.

La fonction de transfert est une fraction rationnelle de deux polynômes qu'il est possible de factoriser :

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=K\frac{\overbrace{(p-z_m)(p-z_{m-1})\cdots(p-z_0)}^{z_i:\text{"zéros" de la fonction de transfert}}}{\underbrace{(p-p_n)(p-p_{n-1})\cdots(p-p_0)}_{p_i:\text{"pôles" de la fonction de transfert}}} \qquad K:\text{gain statique}$$

Les **zéros** sont les racines complexes du numérateur de la fonction de transfert.

Les **pôles** sont les racines complexes du dénominateur de la fonction de transfert.

Une fonction de transfert sous **forme canonique** est de la forme :

$$H(p)=\frac{K}{p^{\alpha}}\cdot\frac{1+\ldots p+\ldots p^2+\cdots+\ldots p^m}{1+\ldots p+\ldots p^2+\cdots+\ldots p^{n-\alpha}} \qquad \begin{array}{l}\alpha:\text{classe du système}\\ n:\text{ordre du système}\end{array}$$

Lorsque $\alpha=1$ on dit que le système possède un intégrateur. Cela vient du fait que l'on peut écrire la fonction de transfert sous la forme $H(p)=\frac{1}{p}.\frac{A(p)}{B(p)}$, $\frac{1}{p}$ étant la transformée de Laplace d'une intégrale.

Application 1 : $H(p)=\dfrac{2+3\cdot p+5\cdot p^2}{3\cdot p^2+4\cdot p^3+7\cdot p^5}$

$$H(p)=\frac{2+3.p+5.p^2}{3.p^2+4.p^3+7.p^5}$$

$$\xrightarrow[\text{canonique}]{\text{forme}} H(p)=\frac{2}{3.p^2}\cdot\frac{1+\frac{3}{2}.p+\frac{5}{2}.p^2}{1+\frac{4}{3}.p+\frac{7}{3}.p^3}$$

ordre : 5
classe : 2
gain statique : $\frac{2}{3}$

Application 2 : Moteur à courant continu $H(p)=\dfrac{1}{k_e+\frac{R\cdot J}{k_C}p+\frac{L\cdot J}{k_C}p^2}$

$$H(p)=\frac{1}{k_e+\frac{R\cdot J}{k_C}p+\frac{L\cdot J}{k_C}p^2}$$

$$\xrightarrow[\text{canonique}]{\text{forme}} H(p)=\frac{1}{k_e}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{R\cdot J}{k_e\cdot k_C}p+\frac{L\cdot J}{k_e\cdot k_C}p^2\right)}$$

ordre : 2
classe : 0
gain statique : $\frac{1}{k_e}$

IV.5 Déterminer la valeur finale par le théorème de la valeur finale

Le **théorème de la valeur finale** permet de calculer la valeur de $f(t)$ quand $t \to +\infty$ à partir de la transformée de Laplace :

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to 0^+} p.L\left[f(t)\right] = \lim_{p \to 0^+} \left[p \cdot F(p)\right]$$

De manière très similaire, le théorème de la valeur initiale permet de calculer $f(t)$ quand $t \to 0$ à partir de la transformée de Laplace : $\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{p \to +\infty} p.L\left[f(t)\right] = \lim_{p \to +\infty} \left[p \cdot F(p)\right]$.

Application : moteur à courant continu $H(p) = \dfrac{1}{k_e + \dfrac{R \cdot J}{k_C} p + \dfrac{L \cdot J}{k_C} p^2}$

A7 - Quelle est la vitesse de rotation $\omega(+\infty)$ en valeur finale, d'un moteur à courant continu soumis à un échelon de tension U_0 ?

Dans le domaine de Laplace, la sortie est : $\Omega(p) = H(p) \cdot U(p)$.

L'entrée est un échelon d'amplitude U_0 de transformée : $U(p) = \dfrac{U_0}{p}$

d'où : $$\Omega(p) = \frac{U_0}{p} \frac{1}{k_e + \dfrac{R \cdot J}{k_C} p + \dfrac{L \cdot J}{k_C} p^2}$$

Par le théorème de la valeur finale on obtient :

$$\omega(+\infty) = \lim_{t \to +\infty} \omega(t) = \lim_{t \to 0} \left(p \cdot \Omega(p)\right) = \lim_{t \to 0} p \cdot \frac{U_0}{p} \frac{1}{k_e + \dfrac{R \cdot J}{k_C} p + \dfrac{L \cdot J}{k_C} p^2} = \lim_{t \to 0} \frac{U_0}{k_e + \dfrac{R \cdot J}{k_C} p + \dfrac{L \cdot J}{k_C} p^2}$$

$$= \frac{U_0}{k_e}$$

V Synthétiser le comportement d'un SLCI

Le schéma bloc fonctionnel des systèmes asservis est une représentation qui se généralise à l'ensemble des SLCI. Il se généralise aussi aisément à des modèles non linéaires.

> Synthétiser le comportement d'un SLCI consiste à déterminer, dans le domaine de Laplace, la relation entre la sortie est les différentes entrées (consigne et perturbations).

V.1 Simplification de schéma-blocs élémentaires

Blocs en série	 $H(p)=H_1(p)\times H_2(p)\times H_3(p)$ La fonction de transfert équivalente de blocs en **série** est égale au **produit** des fonctions de transfert de chacun des blocs.
Blocs en parallèle	 $H(p)=H_1(p)+H_2(p)+H_3(p)$ La fonction de transfert équivalente de blocs en **parallèle** est égale à la **somme** des fonctions de transfert de chacun des blocs.
Blocs en boucle fermée : FTBF	 $H(p)=\dfrac{D(p)}{1+D(p)\cdot R(p)}$ $D(p)$: *FT de la chaine directe* $R(p)$: *FT de la chaine de retour*

Démonstration pour la FTBF : $S(p)=D(p)\cdot\varepsilon(p)=D(p)\cdot[E(p)-S'(p)]=D(p)\cdot[E(p)-R(p).S(p)]$

$$=D(p)\cdot E(p)-D(p)\cdot R(p)\cdot S(p)$$

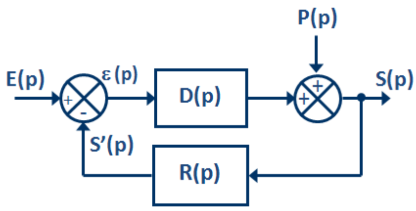
d'où, $S(p)\cdot[1+D(p)\cdot R(p)]=D(p)\cdot E(p)$ et, finalement, $S(p)=\dfrac{D(p)}{1+D(p)\cdot R(p)}\cdot E(p)$.

V.2 Synthèse d'un système à plusieurs entrées : théorème de superposition

Attention :

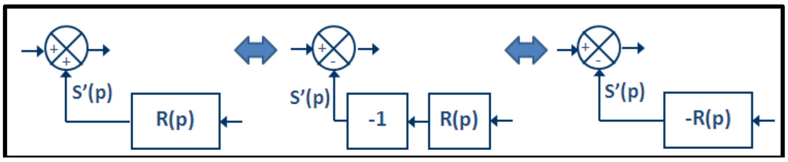
-bien vérifier les signes dans le comparateur ;

- ne pas confondre avec le cas des blocs en parallèle !

Théorème de superposition	 $H_2(p)=\dfrac{S(p)}{P(p)}$ avec $E(p)=0$ $H_1(p)=\dfrac{S(p)}{E(p)}$ avec $P(p)=0$ $S(p)=H_1(p)\times E(p)+H_2(p)\times P(p)$ La sortie du système est obtenue en additionnant toutes les réponses élémentaires. Une réponse élémentaire est obtenue en n'ayant qu'une seule entrée non nulle. C'est une conséquence directe de la linéarité du modèle.

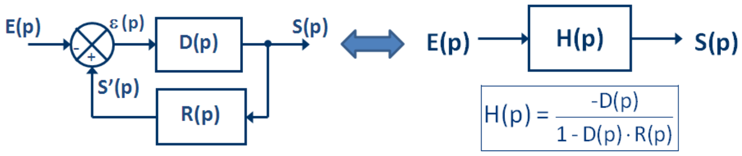
Lorsqu'on travaille sur un schéma-bloc, il faut bien faire attention aux signes des comparateurs (sommateur ou soustracteur) et adapter les règles vues précédemment !

Il ne faut pas hésiter à affecter un signe " - " à certains blocs pour retrouver les règles du cours.

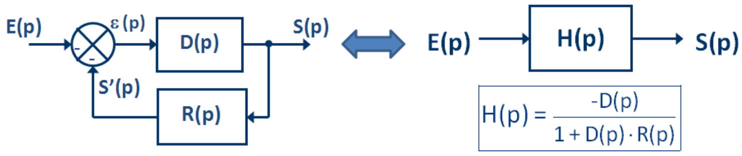


Exemples pour la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) :

$$H(p) = \frac{D(p)}{1 - D(p)\cdot R(p)}$$

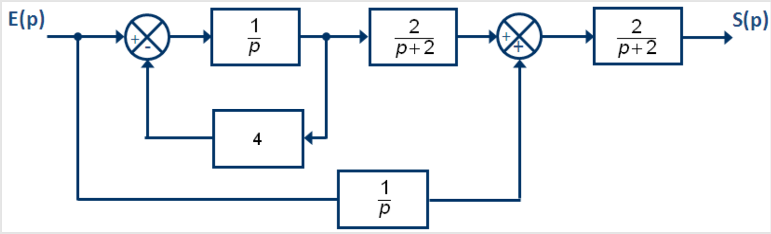


$$H(p) = \frac{-D(p)}{1 - D(p)\cdot R(p)}$$

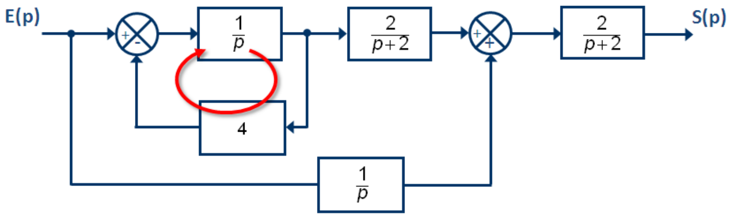


$$H(p) = \frac{-D(p)}{1 + D(p)\cdot R(p)}$$

Application : on cherche à déterminer la fonction de transfert du système représenté par le bloc ci-dessous :

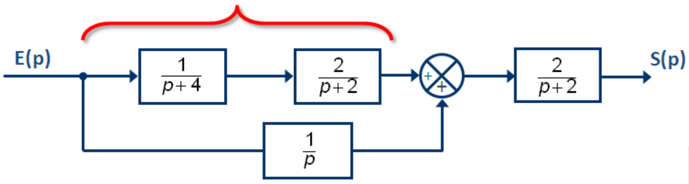


A8 - Simplification 1 : boucle fermée



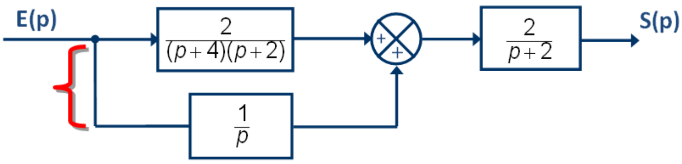
$$H_1(p)=\frac{1/p}{1+4/p}=\frac{1}{p+4}$$

A9 - Simplification 2 : blocs en série



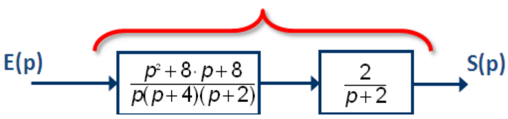
$$H_2(p)=\frac{1}{p+4}\times\frac{2}{p+2}=\frac{2}{(p+4)(p+2)}$$

A10 - Simplification 3 : Blocs en parallèle



$$H_3(p)=\frac{2}{(p+4)(p+2)}+\frac{1}{p}=\frac{p^2+8\cdot p+8}{p(p+4)(p+2)}$$

A11 - Simplification 4 : Blocs en série



$$H(p)=\frac{p^2+8\cdot p+8}{p(p+4)(p+2)}\times\frac{2}{(p+2)}=\boxed{\frac{2(p^2+8\cdot p+8)}{p(p+4)(p+2)^2}}$$

Savoirs

Je connais :

- ☐ la structure d'un SLCI asservi ;
- ☐ les critères permettant d'évaluer les performances d'un SLCI ;
- ☐ les signaux tests ;
- ☐ les particularités d'un SLCI ;
- ☐ la transformation de Laplace et ses propriétés ;
- ☐ les transformées de Laplace usuelles ;
- ☐ les règles d'association et de simplification des schémas-blocs.

Savoir-faire

Je sais :

- ☐ reconnaître un SLCI asservi ;
- ☐ observer les performances d'un SLCI ;
- ☐ utiliser les tables de transformées de Laplace ;
- ☐ déterminer la fonction de transfert d'un SLCI ;
- ☐ représenter la structure d'un SLCI asservi à l'aide d'un schéma-bloc.