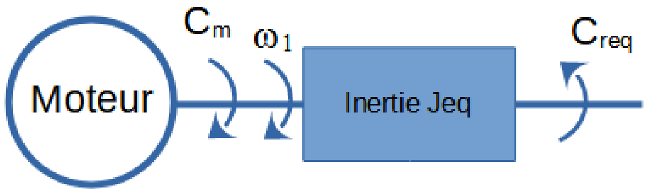
Inertie équivalente et couple résistant équivalent

Lors du cours sur le principe fondamental de la dynamique nous avons vu comment déterminer les couples à transmettre pour satisfaire à une accélération angulaire donnée ou à déterminer l'accélération en fonction de couples ou forces fournis.
Cependant entre le moteur (en général à choisir), il y a quasi systématiquement un réducteur de vitesse dans lequel les pièces tournantes présentent également des moments d'inertie et des frottements introduisant la notion de rendement.

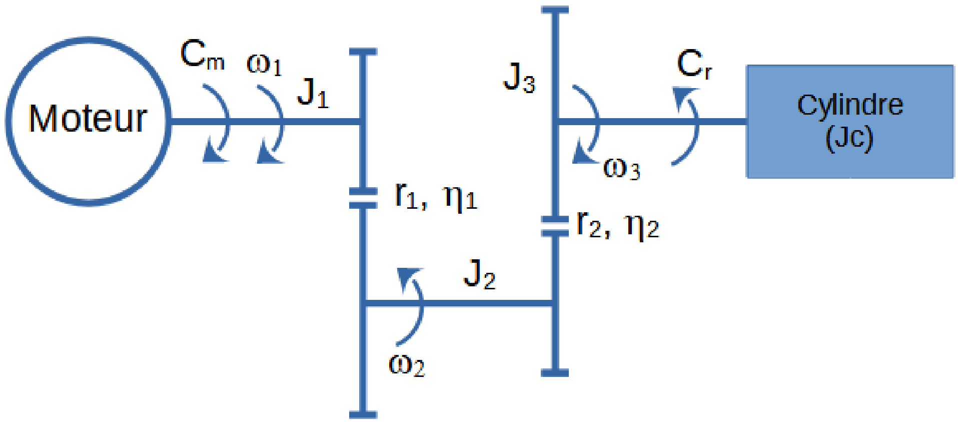
Mise en situation

Vous savez résoudre un tel probleme ⇒



Cf. cours de Principe Fondamental de la Dynamique.

Sauriez-vous résoudre un problème comme celui-ci ? :



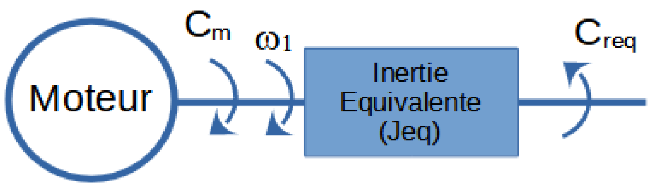
Avec :

- Cm : couple moteur (N.m)
- Cr : couple résistante (N.m)
- J_1, J_2, J_3 : inertie des pièces 1, 2 et 3 (kg.m²)
- ω_1, ω_2, ω_3 vitesses de rotation des pièces 1, 2 et 3 (rad.s^{-1})

La réponse est non...pour l'instant !

Pour y parvenir il faut procéder en deux étapes :

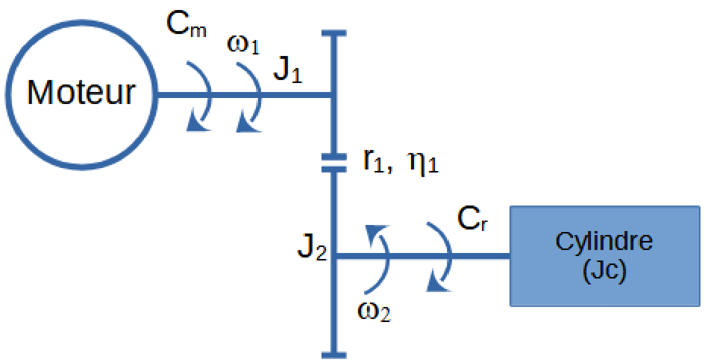
- Déterminer une **inertie équivalente Jeq** ramenée sur l'arbre moteur ;
- Déterminer un **couple résistant équivalent Creq** image du couple résistant Cr ramené sur l'arbre moteur.



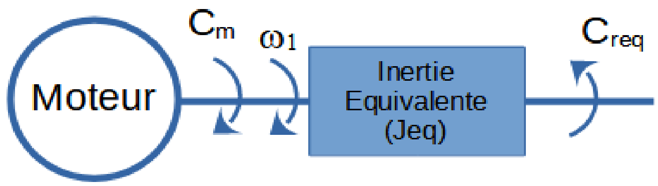
Démarche sur un exemple simple

L'objectif est de transformer …

Ce schéma en ..



... ce schéma



Détermination du couple résistant équivalent :

Rappels :

La puissance instantanée est le produit d'une grandeur effort et d'une grandeur flux $P = e \cdot f$

En mécanique il s'agit du couple C (effort) et de la vitesse de rotation ω (flux).

En tout état de cause en mécanique il s'agit d'un produit scalaire $P = \vec{C} \cdot \vec{\omega}$ (rotation) et $P = \vec{f} \cdot \vec{v}$ (translation).
il y a donc de manière implicite des puissances positives et négatives.

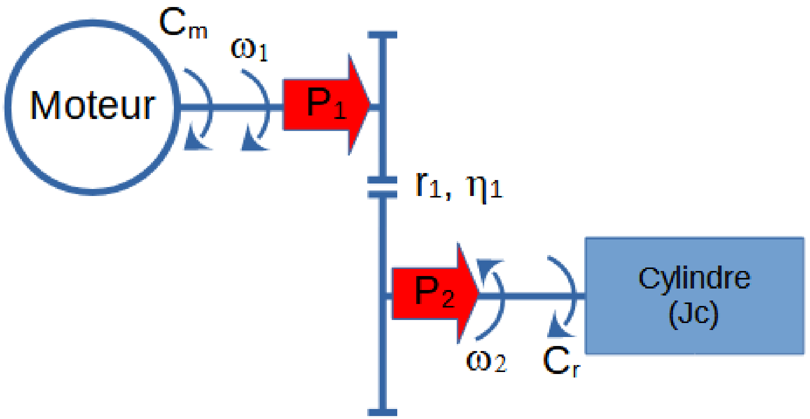
Une puissance positive traduit le fait que le couple / la force utilisé(e) pour le calcul contribue à la rotation / translation et qu'une puissance négative traduit le fait que le couple / la force utilisé(e) pour le calcul s'oppose à la rotation / translation.

Pour exemple, dans le cas présent : $P=\vec{C}_m \cdot \vec{\omega}_1 > 0$ et $P=\vec{C}_r \cdot \vec{\omega}_2 < 0$ Dans la suite du cours nous travaillerons en valeur absolue (pas de signe négatif).

On rappelle également que :

- le rendement est défini comme suit : $\eta=\frac{P_{sortie}}{P_{entrée}}$
- le rapport de transmission d'un réducteur de vitesse comme suit : $r=\frac{\omega_{sortie}}{\omega_{entrée}}$

Ramenons le couple résistant Cr sur l'arbre moteur (Creq) :



$$\eta=\frac{P_{sortie}}{P_{entrée}}=\frac{P_2}{P_1}=\frac{C_r \cdot \omega_2}{C_m \cdot \omega_1} \quad \text{et} \quad r_1=\frac{\omega_2}{\omega_1}$$

$$\Rightarrow \quad \eta=\frac{C_r \cdot r_1 \cdot \omega_1}{C_m \cdot \omega_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_m=\frac{C_r \cdot r_1}{\eta}=C_{req}}$$

Détermination de l'inertie équivalente

Pour déterminer l'inertie équivalente il suffit de sommer les énergies cinétiques (rotation et translation) de chacun des éléments puis ramener les écritures sur l'arbre moteur.

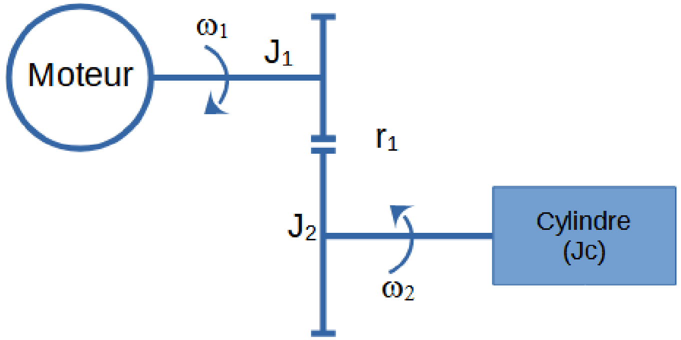
Rappel :

- Énergie cinétique d'un solide en translation $E_c=\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$
- Énergie cinétique d'un solide en rotation $E_c=\frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$

Calculons l'énergie cinétique totale Ec :

$$E_c = E_{c1} + E_{c2} + E_{ccyl} \Rightarrow E_c = \frac{1}{2} \cdot J_1 \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} \cdot J_2 \cdot \omega_2^2 + \frac{1}{2} \cdot J_c \cdot \omega_2^2$$

avec $r_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1}$



Exprimons tout en fonction de ω_1 :

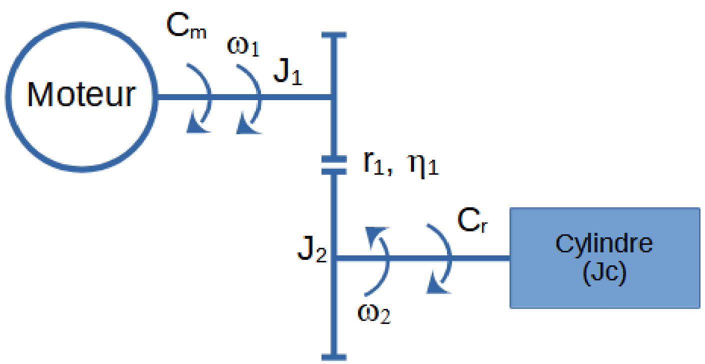
$$E_c = \frac{1}{2} \cdot J_1 \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} \cdot J_2 \cdot r_1^2 \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} \cdot J_c \cdot r_1^2 \cdot \omega_1^2$$

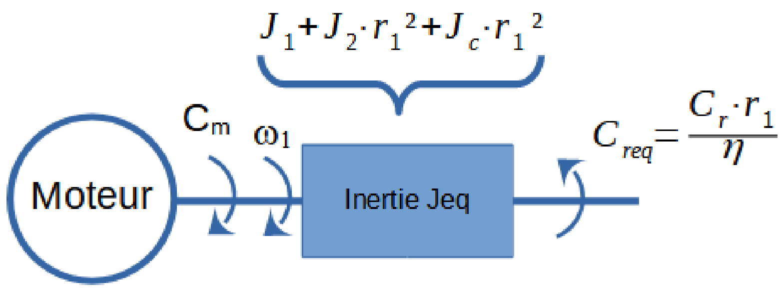
Factorisons par ω_1 :

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot \left(J_1 + J_2 \cdot r_1^2 + J_c \cdot r_1^2\right) \cdot \omega_1^2 = \frac{1}{2} \cdot J_{eq} \cdot \omega_1^2$$

Finalement …

Ce schéma est transformé en ... ... ce schéma

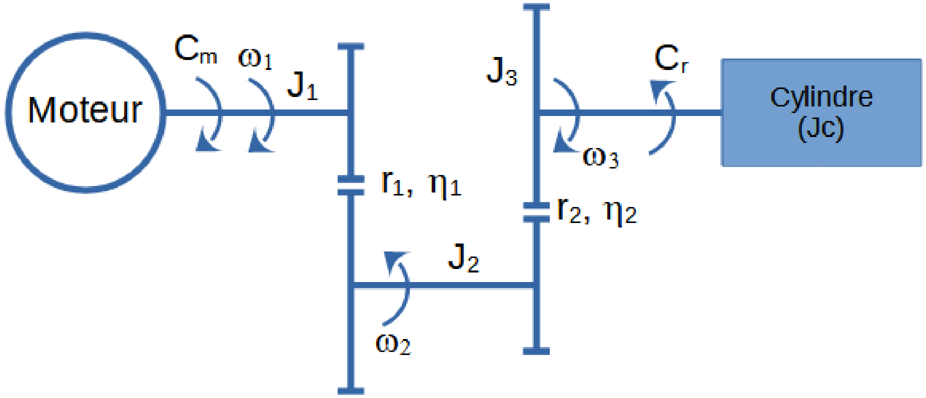




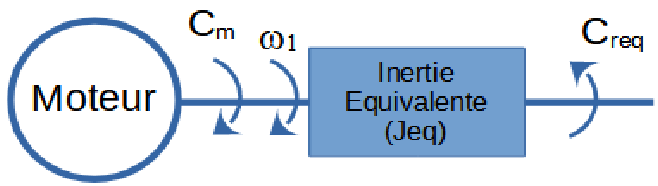
Nous pouvons à présent appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)… c'est pas beau ça !?;)

L'objectif est de transformer …

Ce schéma en ..

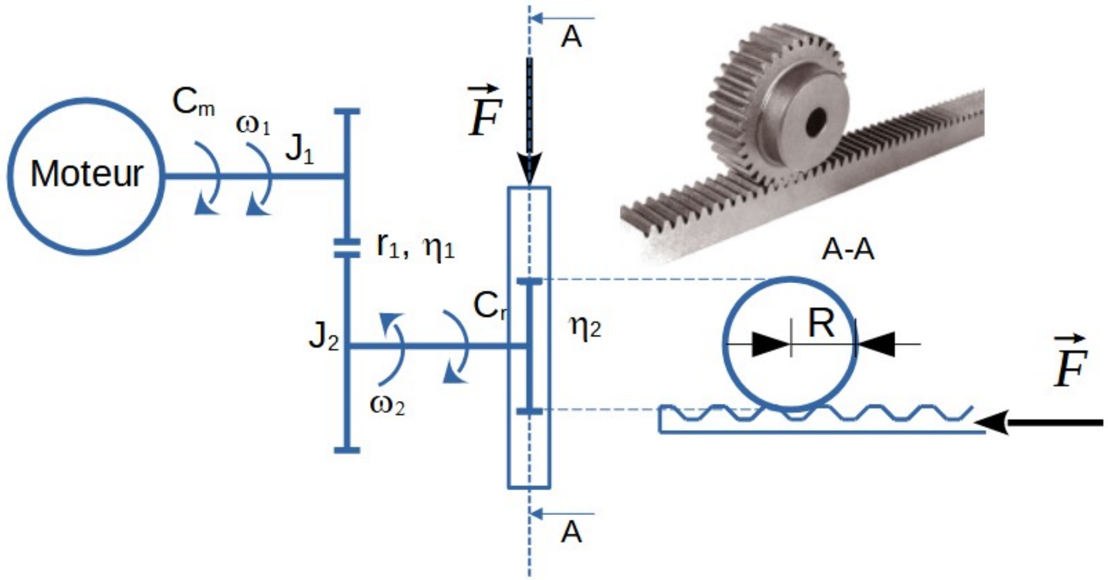


... ce schéma

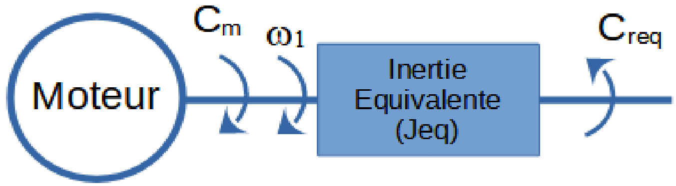


L'objectif est de transformer …

Ce schéma en ..

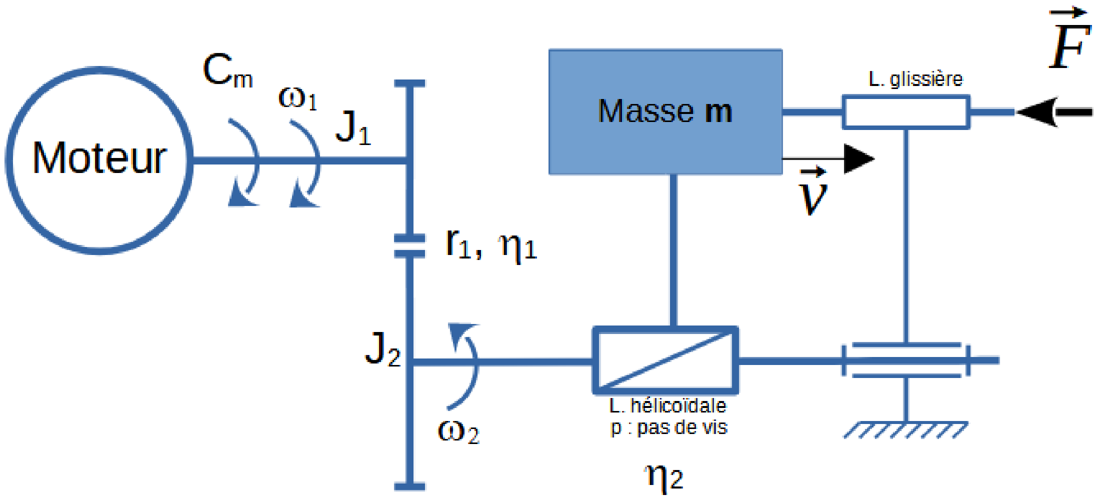


... ce schéma

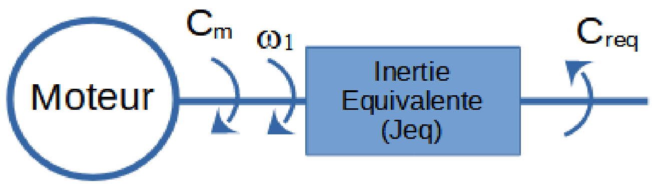


L'objectif est de transformer …

Ce schéma en ..

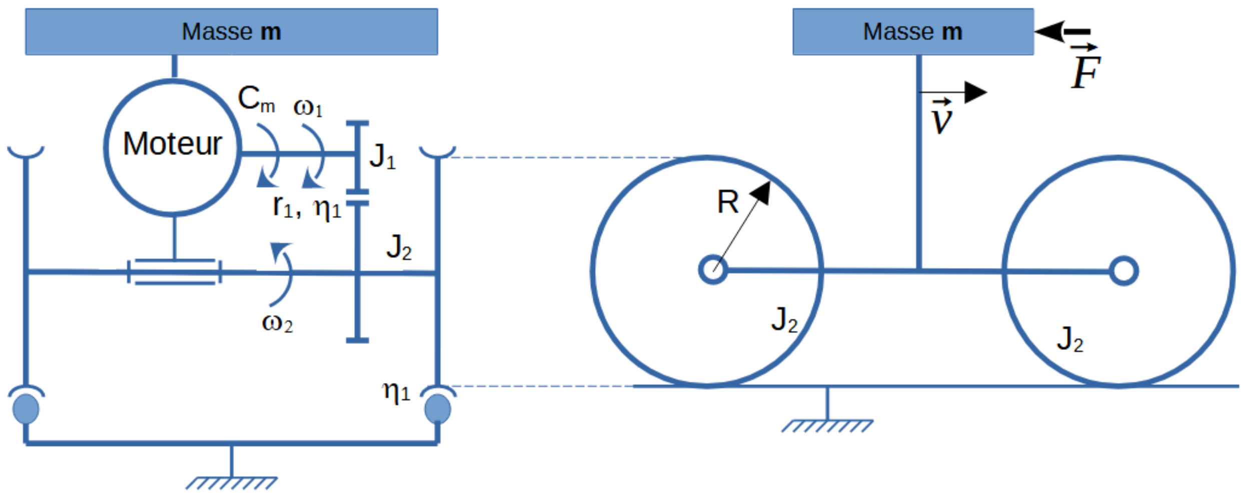


... ce schéma



L'objectif est de transformer …

Ce schéma en ..



... ce schéma