DOCUMENT RESSOURCE

Vecteurs, Produits Scalaire et trigonométrie

1 Les vecteurs et produits scalaires en ingénierie

Intérêts des vecteurs

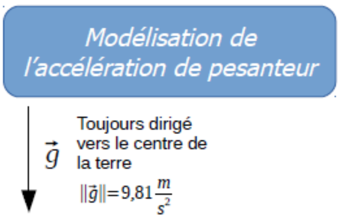
En ingénierie et en sciences, de nombreuses grandeurs physiques (tension, intensité de courant, force, vitesse, distance, accélération, etc) sont modélisées par des vecteurs.

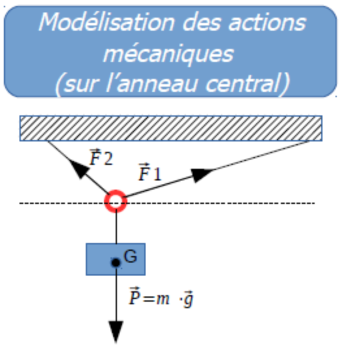
Le vecteurs est un outil puissant dès lors que l'on maîtrise les outils de calculs qui lui sont associés, c'est l'objet de ce cours !

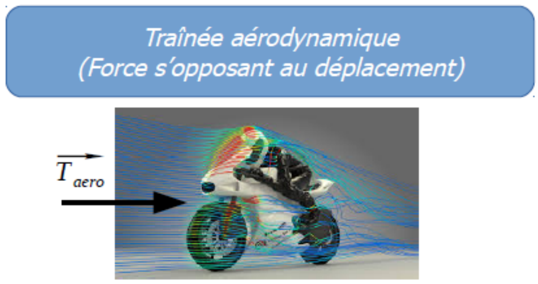
Applications

- Calcul du travail d'une force (en Joule)
  $W_{\overrightarrow{AB}}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{AB}$
- Calcul d'une puissance (en Watt)
  $P = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}$

Exemples de modélisations par des vecteurs







2 Trigonométrie et Pythagore

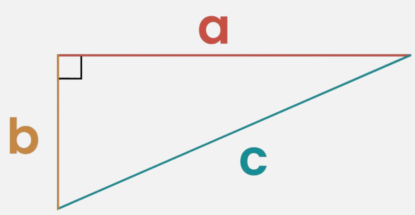
2.1 Pythagore

Pythagore 2D

Le théorème de Pythagore permet de déterminer l'un des côté d'un triangle **rectangle** connaissant deux des autres côtés.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Condition de validité : uniquement dans un triangle rectangle

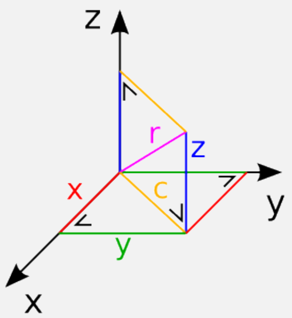


Ce théorème fonctionne également en 3 dimensions !

Pythagore 2D

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Condition de validité : uniquement dans un repère orthogonal ou orthonormé.



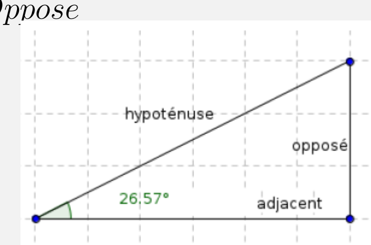
2.2 Trigonométrie

Moyen Mnémotechnique : S.O.H.C.A.H.T.O.A

$$sin\ \theta = \frac{Oppose}{Hypotenuse} \quad \Big| \quad cos\ \theta = \frac{Adjacent}{Hypotenuse} \quad \Big| \quad tan\ \theta = \frac{Adjacent}{Oppose}$$

Remarque importante

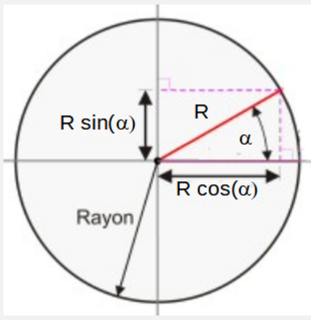
Attention : la **position de l'angle** définit les côtés « opposés » et « adjacents ». Si l'on prend l'angle opposé, les cotés « opposés » et « adjacents » s'inversent...



projection trigonométrique

En ingénierie et en sciences, ce sont rarement les sinus, cosinus et tangente des angles que nous cherchons à connaître mais plutôt les projections de l'hypoténuse sur le coté adjacent ou opposé.
Exemple : les projections du segment rouge de rayon R valent :

- Sur l'axe des Cosinus : $R \cdot cos(\alpha)$
- Sur l'axe des Sinus : $R \cdot sin(\alpha)$



2.3 Quelques valeurs remarquables utiles

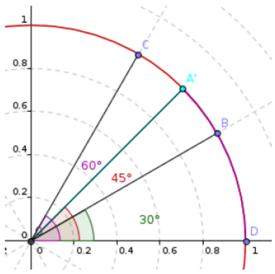
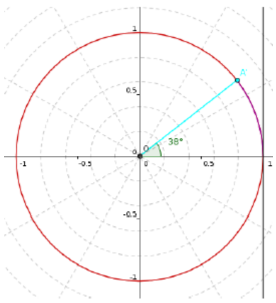
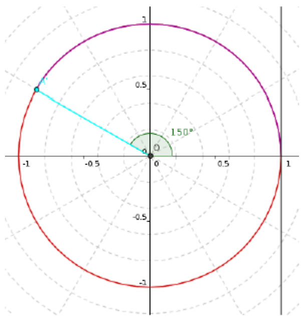


Figure 1: Valeurs remarquables utiles à mémoriser en vue de simplifications

Représenter sur les figures ci-contre le cosinus, sinus et tangente de chacun des deux angles.





3 Les vecteurs

3.1 Définition d'un vecteur

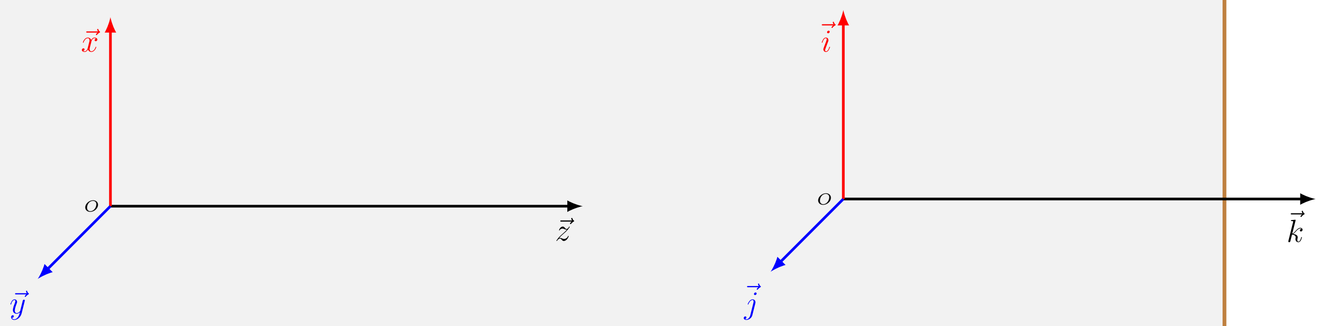
Un vecteur est une grandeur définie par :

▷ Une direction	Droite qui porte le vecteur
▷ Un sens	Orientation origine-extrémité du vecteur, symbolisé par une flèche
▷ Une norme (ou intensité, module)	Valeur de la grandeur mesurée par le vecteur, notée $\left\|\overrightarrow{V}\right\|$

3.2 Base orthonormée directe

Dès lors que l'on évoque des vecteurs dans l'espace ou dans le plan il est nécessaire de les référencer par rapport à une base $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ ou en mathématiques plus souvent utilisé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Bases orthonormées fréquemment utilisées



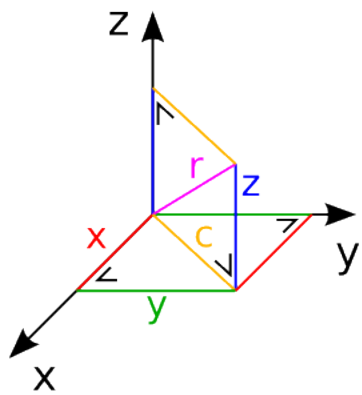
Une base orthonormée signifie :

- **Ortho :** Tous les vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ (ou $\vec{i}$, $\vec{i}$ et $\vec{k}$) sont perpendiculaires deux à deux.
- **Normé :** Tous les vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ (ou $\vec{i}$, $\vec{i}$ et $\vec{k}$) ont pour norme "1".
  $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| = \|\vec{z}\| = 1$ (ou $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$)

3.3 Composantes d'un vecteur

Dans une base $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ de l'espace vectoriel, il existe 3 réels x, y et z, appelés composantes du vecteur $\overrightarrow{r}$, tels que l'on puisse écrire de deux manières différentes :

- En vecteur ligne : $\overrightarrow{r} = X \cdot \overrightarrow{x} + Y \cdot \overrightarrow{y} + Z \cdot \overrightarrow{z}$
- En vecteur colonne : $\vec{r} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$



Application

Écrire le vecteur $\overrightarrow{A}$ en écriture ligne et en écriture colonne.

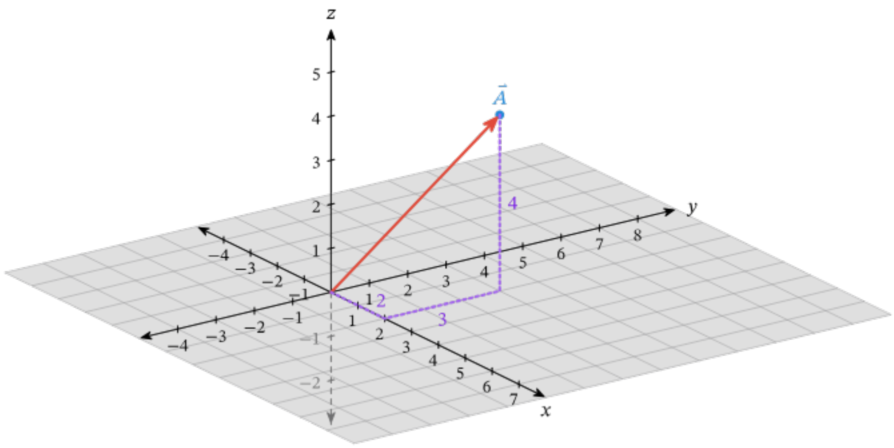


Figure 2: Vecteur $\overrightarrow{A}$ dans une repère orthonormé à 3 dimensions

3.4 Somme de deux vecteurs

Soit deux vecteur $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ dont les composantes sont les suivantes :

- En écriture ligne : $\overrightarrow{A} = X_A \cdot \overrightarrow{x} + Y_A \cdot \overrightarrow{y} + Z_A \cdot \overrightarrow{z}$

  ou en écriture colonne : $\vec{A}\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix}$

- En écriture ligne : $\overrightarrow{B} = X_B \cdot \overrightarrow{x} + Y_B \cdot \overrightarrow{y} + Z_B \cdot \overrightarrow{z}$

  ou en écriture colonne : $\vec{B}\begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{pmatrix}$

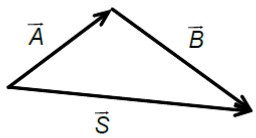


Figure 3: Somme de deux vecteurs

La somme $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{pmatrix} = (X_A + X_B) \cdot \overrightarrow{x} + (Y_A + Y_B) \cdot \overrightarrow{y} + (Z_A + Z_B) \cdot \overrightarrow{z}$

3.5 Norme d'un vecteur

Norme d'un vecteur

Soit le vecteur $\overrightarrow{A}\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix}$

La norme se calcule avec Pythagore étant donné que toutes les composantes sont orthogonales deux à deux :

$$\left\|\overrightarrow{A}\right\| = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}$$

Application

Soit les vecteurs suivants : $\vec{A}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{B}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

- **Tracer** dans une base $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$
- **Déterminer** les normes de ces deux vecteurs.

4 Définition du produit scalaire

4.1 Notion de scalaire

Les scalaires sont des nombres positifs ou négatifs, utilisés pour représenter des quantités diverses :

- temps (s)
- température(°C ou K)
- masse (kg)
- puissance (W)
- énergie (eV, J, Wh, etc)
- etc

Par exemple : une hauteur de 20 m, un volume de 18 m3, une puissance de 200 MW, ...

À retenir

Le produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{A}$ par le vecteur $\overrightarrow{B}$ s'écrit : $C = \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}$

On retiendra qu'un **produit scalaire** (réalisé pourtant sur des vecteurs, ici $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$) donne un **résultat Scalaire**[a] (ici C)

Vous remarquerez que l'opérateur **produit scalaire** est un "point" ("$\cdot$") noté entre les deux vecteurs.

[a] Un scalaire est simplement un nombre

4.2 Défnitions du produit scalaire

Commençons par définir deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ $\quad \vec{A}\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix}$ et $\vec{B}\begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{pmatrix}$

Le produit scalaire s'obtient de deux manières différentes (3 en mathématique mais non utiles en sciences) :

Définition à connaître

- Définition 1 : $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = \left\|\overrightarrow{A}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{B}\right\| \cdot cos(\widehat{\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}})$
- Définition 2 : $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = X_A \cdot X_B + Y_A \cdot Y_B + Z_A \cdot Z_B$

Valeurs remarquables

Si l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$:

- vaut 90° (ou $\frac{\pi}{2}$), le produit scalaire est ....
- est compris entre $[0; +\frac{\pi}{2}[$, le produit scalaire est ....
- est compris entre $]\frac{\pi}{2}; \pi]$, le produit scalaire est ....

4.3 Applications produit scalaire

Calculer un produit scalaire à partir des composantes des vecteurs

Soit les vecteurs suivants : $\vec{A}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{B}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

- **Tracer** dans une base $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$
- **Déterminer** le produit scalaire de ces deux vecteurs.

Déterminer l'angle entre deux vecteurs

Soit les vecteurs suivants : $\vec{A}\begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{B}\begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}$

- **Déterminer** le produit scalaire de ces deux vecteurs.