Cours

Principe fondamental de la dynamique - P.F.D

L'objectif du cours est d'être capable :

- déterminer les efforts (Forces, Moments de forces ou Couples) afin de satisfaire à des lois de vitesse ou lois d'accélération de solides / système ;
- déterminer les accélérations (et par voie de conséquence les vitesses et positions) subies par un solide /système connaissant les efforts extérieurs.

Énoncé du principe fondamental de la dynamique (P.F.D)

Le P.F.D [a] est une extension de la deuxième loi de Newton à la différence qu'il va plus loin qu'un raisonnement unique sur la somme des forces extérieures ($\Sigma\overrightarrow{F_{ext}} = \Sigma\overrightarrow{F_{\bar{S}\to S}}$) appliquées à un solide / système isolé. En effet il prend en compte également les moments et couples exercés sur un solide / système.

Deuxième loi de Newton

$$\Sigma\overrightarrow{F} = m \cdot \overrightarrow{a_G}$$

Principe Fondamental de la Dynamique

Il se décline en deux théorèmes :

- Théorème de la **Résultante dynamique** : $\Sigma\overrightarrow{F_{\bar{S}\to S}} = m \cdot \overrightarrow{a_G}$ (équivalent à la deuxième loi de Newton)

  Avec : $\Sigma\overrightarrow{F_{\bar{S}\to S}}$ en N $\quad$ m en kg $\quad$ $\overrightarrow{a_G}$ en $m \cdot s^{-2}$

- Théorème du **Moment dynamique** : $\Sigma\overrightarrow{M_{A,\bar{S}\to S}} = [I_{G(S)}] \cdot \dfrac{d\overrightarrow{\Omega}}{dt}$

  Avec : $\Sigma\overrightarrow{M_{A,\bar{S}\to S}}$ en $N \cdot m$ $\quad$ $[I_{G(S)}]$ en $kg \cdot m^2$ $\quad$ $\overrightarrow{\Omega}$ en $rad \cdot s^{-1}$

$[I_{G(S)}]$: matrice d'inertie du solide en rotation dont l'axe de rotation passe par le centre de masse G

[a] Principe Fondamental de la dynamique

1 Matrice d'inertie

La masse m seule ne permet pas de caractériser la difficulté à mettre un solide en mouvement ou à le ralentir. Dans le cas particulier où ce mouvement est une **translation**, **la masse suffit**, mais pour des **mouvements plus complexes**, la **répartition de cette masse** sur le solide est à retenir.

La **répartition des masses est caractérisée par deux quantités** :

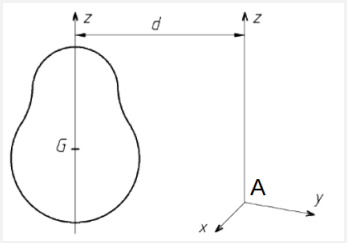
- **le moment d'inertie**
- le produit d'inertie

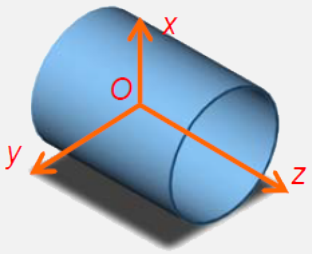
Ces deux quantités s'expriment en $kg.m^2$.

Dans le cadre du programme pré-baccalauréat, nous n'évoquerons pas les produits d'inertie. Également, la rotation des solides susceptibles d'être mis en mouvement ou ralentis par des actions mécaniques extérieures se fera par rapport à un axe passant par son centre de gravité.

Remarque :

Le théorème de Huygens permet aisément de déterminer le moment d'inertie d'un solide dont l'axe de rotation ne passe pas par le centre de masse. $[I_{A(S)}] = [I_{G(S)}] + m \cdot d$ avec m la masse du solide (kg) et d la distance (m) par rapport à l'axe passant par le centre de masse G.





Le centre de gravité G étant confondu avec le point 0, origine du repère

Une matrice d'inertie se caractérise par 6 paramètres nommés A, B, C, D, E et F et organisés de la manière suivante dans une matrice d'inertie :

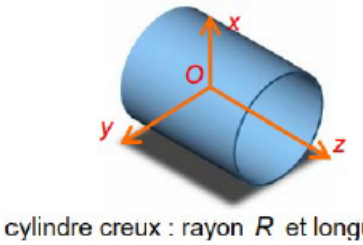
$$[I_{0(S)}] = [I_{G(S)}] = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & -F & -E \\ -F & \mathbf{B} & -D \\ -E & -D & \mathbf{C} \end{pmatrix}$$

avec :

- A, B et C : **moments d'inertie** du solide respectivement autour des axes $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$
- D, E et F : produits d'inertie.

Exemple de matrice d'inertie pour le cylindre de la figure 2

En se reportant à l'annexe "Matrices de moments d'inertie", il est aisé de déterminer les moments d'inertie selon que le solide tourne autour des axes $\vec{x}$, $\vec{y}$ ou $\vec{z}$



Matrice exprimée au point O

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{12}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{pmatrix}$$

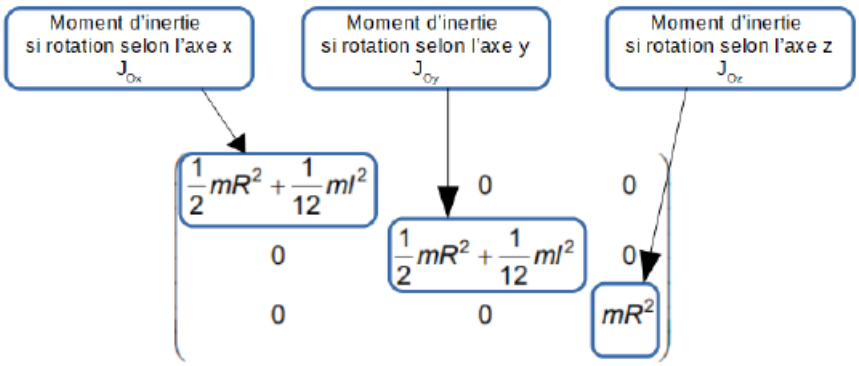


Figure 1: Matrice d'inertie pour un cylindre creux

Calculs de moments d'inertie

À partir de l'annexe "Matrices de moments d'inertie":

Application

Déterminer les moments d'inertie selon l'axe $\vec{z}$ pour le solide figure 2.
Caractéristiques : $m = 2\ kg$, $R = 20\ cm$, $l = 5\ m$

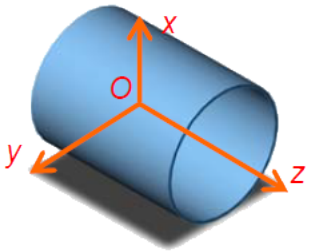


Figure 2: Cylindre creux

Application

Déterminer les moments d'inertie selon l'axe $\vec{z}$ pour le solide figure 3.
Caractéristiques : $m = 2\ kg$, $R = 20\ cm$, $l = 5\ m$

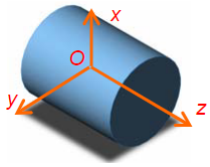


Figure 3: Cylindre plein

Application

Déterminer les moments d'inertie selon l'axe $\vec{y}$ pour le solide figure 4.
Caractéristiques : $m = 2\ kg$, $l_x = 40\ cm$, $l_y = 10\ cm$, $l_z = 5\ cm$

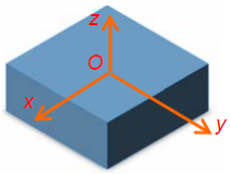


Figure 4: Cylindre creux

Application

Parmi ces trois solides selon les axe de rotations énoncés précédemment et en ne considèrant uniquement un couple de frottement identique pour chacun des trois solides (traînée négligée) :

- lequel nécessitera un couple plus élevé pour une accélération donnée ?
- lequel s'arrêtera le premier ?
- à quelle vitesse de rotation d'être amené chacun des solides pour stoker une énergie cinétique de $E = 4\ J$?

2 Applications du principe fondamental de la dynamique

Application 1

On souhaite déterminer la force F_2 nécessaire à déplacer la masse m_1 selon le profil de vitesse ci-après. On constate que $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{A_{2\to1}}$

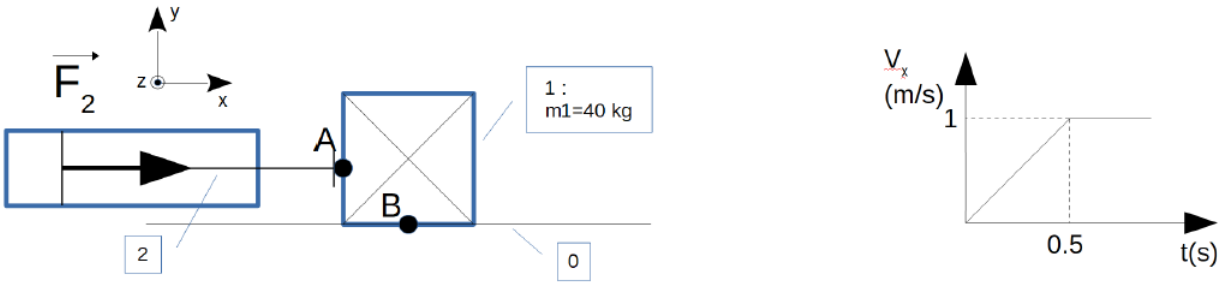


Figure 5: Application de théorème de la résultante dynamique

Bilan des actions mécaniques (BAME)

$$\overrightarrow{A_{2\to1}} \begin{pmatrix} X_A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$\overrightarrow{A_{2\to1}}$ Action mécanique en A de 2 sur 1.

$$\overrightarrow{B_{2\to1}} \begin{pmatrix} -78 \\ 392 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$\overrightarrow{B_{2\to1}}$ Action mécanique en B de 2 sur 1.

La composante X_B représente la **réaction Tangentielle (T)** due au frottement de la pièce (1) sur le support (0)
La composante Y_B représente la **réaction Normale (N)** du support (0) sur la pièce (1),

$$\overrightarrow{P_1} \begin{pmatrix} 0 \\ -m_1 \cdot g \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$\overrightarrow{P_1}$ Poids de la pièce 1.

Toutes les composantes sont exprimées en Newton

Positionner les actions mécaniques sur le schéma.

En appliquant le théorème de la résultante dynamique, **déterminer** la force $\overrightarrow{A_{2\to1}} \begin{pmatrix} X_A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour satisfaire à la loi de vitesse.

Application 2

Bilan des actions mécaniques (BAME)

On souhaite déterminer l'accélération subie par le solide 1.

$$\overrightarrow{A_{2\to1}} \begin{pmatrix} 500 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \text{ et } \overrightarrow{B_{0\to1}} \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{pmatrix} T \\ N \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\overrightarrow{P_1} \begin{pmatrix} 0 \\ -m_1 \cdot g \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Toutes les composantes sont exprimées en Newton

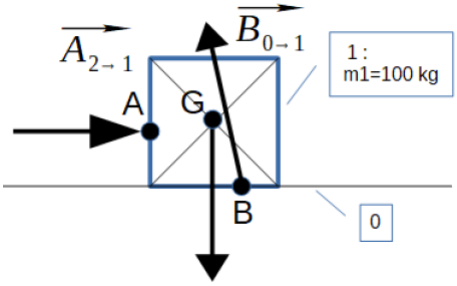


Figure 6: Application de théorème de la résultante dynamique

Les pièces est 1 et 2 sont en acier → coefficients de Coulomb $\mu_s = 0,18$ et $\mu = 0,15$

Complément : Loi de Coulomb

Les frottements secs sont modélisés par la loi de Couloumb.
On définit un coefficient statique (pas de glissement) μ_s et un coefficient cinématique μ (ça glisse !)
L'effort tangentiel $\overrightarrow{T}$ se calcul de la manière suivante :

- $\left\|\overrightarrow{T}\right\| = T = \mu_s \cdot \left\|\overrightarrow{N}\right\|$ pour la force d'adhérence ;
- $\left\|\overrightarrow{T}\right\| = T = \mu \cdot \left\|\overrightarrow{N}\right\|$ pour la force de frottement.

Déterminer les composantes X_B et Y_B et les positionner sur le schéma.

Déterminer l'accélération subie par le solide 1.

Application 3

On souhaite déterminer l'accélération subie par le solide 1 au regard des forces mises en jeu.

Bilan des actions mécaniques (BAME)

Considérons la voiture ci-dessous, poussée par un homme (h), à laquelle les forces suivantes sont exercées :

avec $\overrightarrow{A_{h\to 1}} \begin{pmatrix} 400 \\ -150 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

$\overrightarrow{B_{0\to 1}} \begin{pmatrix} X_B \\ 5000 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ $\overrightarrow{C_{0\to 1}} \begin{pmatrix} X_C \\ 6772 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

$\overrightarrow{P_1} \begin{pmatrix} 0 \\ -m_1 \cdot g \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

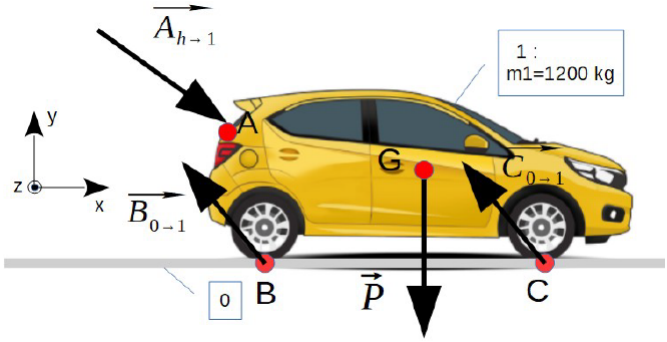


Figure 7: Application de théorème de la résultante dynamique

Toutes les composantes sont exprimées en Newton

Les composantes X_B et X_C représente la résistance au roulement.

Les pneus qui équipent la voiture présentent un coefficient de résistance au roulement $C_{rr} = 6\ kg \cdot tonne^{-1}$

En observant les composantes des actions mécaniques extérieures, **déterminer** les masses du véhicule reprises par l'essieu avant et l'essieu arrière.

Déterminer les composantes X_B et X_C (on rappel que la résistance au roulement vaut $R_r = C_{rr} \cdot P$)

En appliquant le théorème de la résultante dynamique, **déterminer** l'accélération subie par le solide 1.

Utilisation du théorème du moment dynamique

En utilisant le théorème du moment dynamique, **déterminer** les distances X_{GB} et X_{GC}

Application 4

On souhaite déterminer le couple moteur C_m nécessaire à conférer au volant d'inertie 2 (masse m_2 de 32 kg et de moment d'inertie exprimé par la matrice d'inertie I_{G2} figure 8) pour atteindre une vitesse de rotation $N_2 = 100\ tr \cdot min^{-1}$ en 10 secondes conformément au profil de vitesse figure 9.

$$[I_{G2}] \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2,11 & 0 \\ 0 & 0 & 2,11 \end{bmatrix}$$

Figure 8: Matrice d'inertie du solide 2 pris en sont centre de masse.

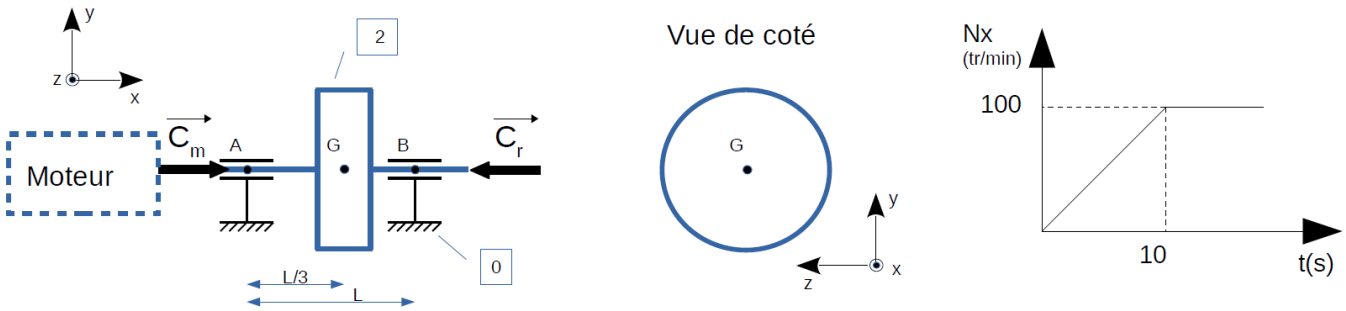


Figure 9: Application de théorème du moment dynamique

Bilan des actions mécaniques (BAME)

Toutes les composantes sont exprimées en Newton-mètre.

Les liaisons pivots sont supposées parfaites (pas de couple résistant de frottement).

$$\overrightarrow{C_{moteur\to 2}} = \overrightarrow{C_m} \begin{pmatrix} L_m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$\overrightarrow{C_{moteur\to 2}} = \overrightarrow{C_m}$: Couple moteur $(N \cdot m)$.

$$\overrightarrow{C_{mecanisme\to 2}} = \overrightarrow{C_r} \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$\overrightarrow{C_{mecanisme\to 2}} = \overrightarrow{C_r}$: Couple résistant dû au mécanisme entraîné $(N \cdot m)$.

Déterminer le couple moteur C_m nécessaire à assurer la cinématique imposée.

Utilisation du théorème du moment dynamique

En utilisant le théorème du moment dynamique, **déterminer** les actions mécaniques $\overrightarrow{A_{0\to 1}}$ et $\overrightarrow{B_{0\to 1}}$

Application 5

On désire déterminer le couple moteur C_m en A nécessaire à lever la lisse (1) selon la loi de vitesse figure 10.

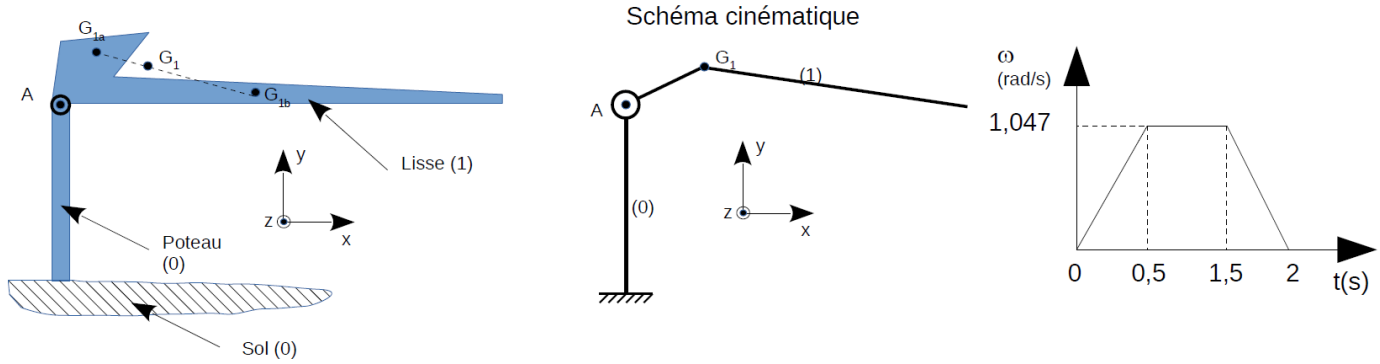


Figure 10: Application de théorème du moment dynamique

Bilan des actions mécaniques (BAME)

Toutes les composantes sont exprimées en Newton-mètre.

La liaison pivot en A présente un couple de frottement C_r (exprimer à la montée de la lisse).

La lisse (1) a pour masse $m_1 = 4\ kg$ et pour moment d'inertie $I_{A1z} = 12\ kg \cdot m^2$

$$\overrightarrow{C_{moteur\to 1}} = \overrightarrow{C_m} \begin{pmatrix} L_m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$\overrightarrow{C_{moteur\to 1}} = \overrightarrow{C_m}$: Couple moteur $(N \cdot m)$.

$\overrightarrow{C_{mecanisme\to 2}} = \overrightarrow{C_r}$: Couple résistant dû au mécanisme entraîné $(N \cdot m)$.

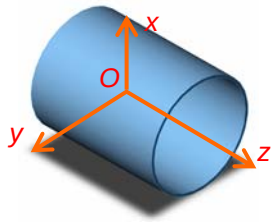
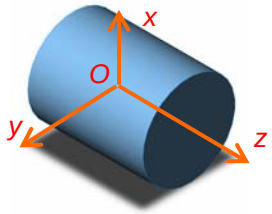
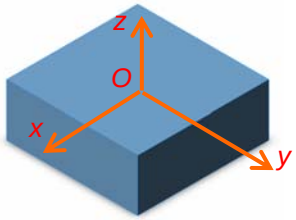
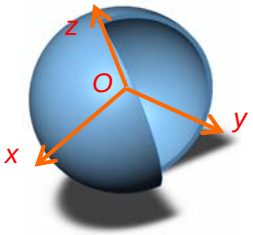
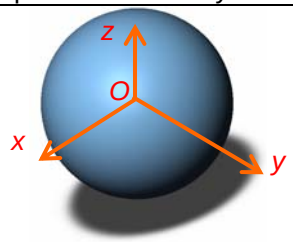
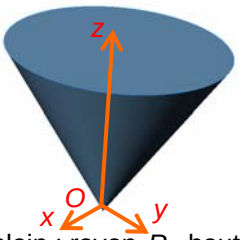
$$\overrightarrow{C_{pivotA}} = \overrightarrow{C_r} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

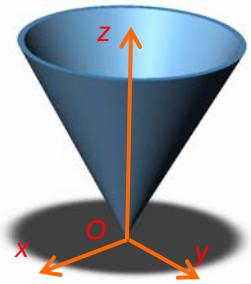
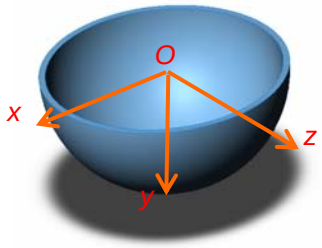
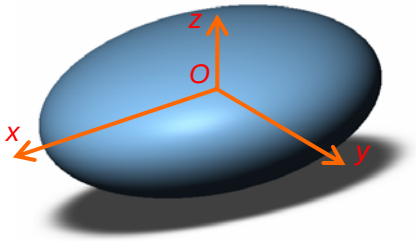
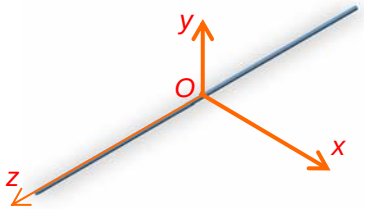
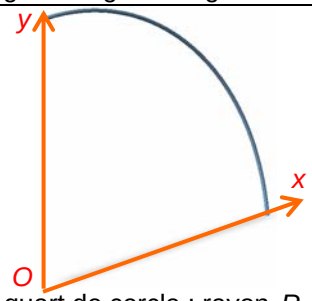
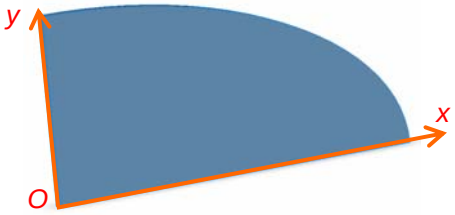
Le centre de gravité G_1 n'est pas situé dans la matière en raison de la forme géométrique de la lisse. (unités exprimées en mètre).

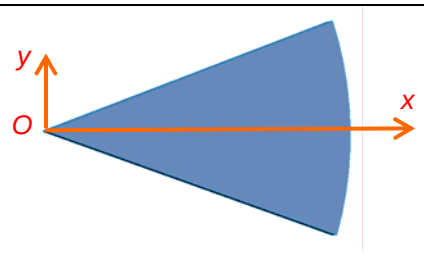
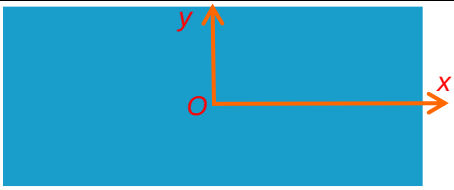
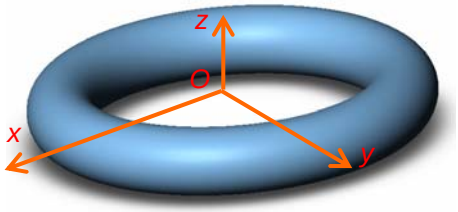
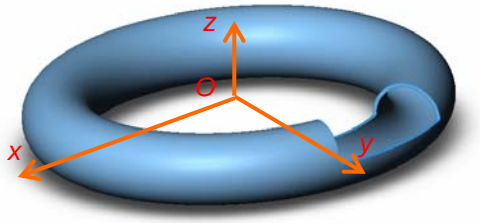
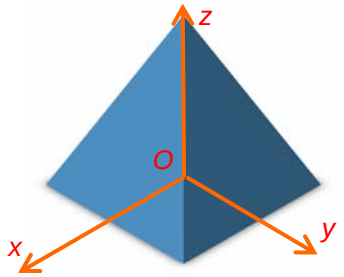
Son vecteur position est le suivant : $\overrightarrow{A_{G1}} \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,2 \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

En appliquant le théorème de la résultante dynamique, **déterminer** le couple moteur C_m nécessaire pour assurer la loi de vitesse imposée.

Géométrie des masses de solides homogènes

Corps homogène de masse m	Centre d'inertie	Matrice d'inertie en $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$
 cylindre creux : rayon R et longueur l	centre	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}mR^2+\frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mR^2+\frac{1}{12}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{pmatrix}$
 cylindre plein : rayon R et longueur l	centre	$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}mR^2+\frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2+\frac{1}{12}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{pmatrix}$
 parallélépipède rectangle : coté a, b, c	centre	$\begin{pmatrix} \frac{1}{12}m\left(b^2+c^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}m\left(a^2+c^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m\left(a^2+b^2\right) \end{pmatrix}$
 sphère creuse : rayon R	centre	$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}mR^2 \end{pmatrix}$
 sphère pleine : rayon R	centre	$\begin{pmatrix} \frac{2}{5}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mR^2 \end{pmatrix}$
 cône plein : rayon R , hauteur h	$z_C=\frac{3h}{4}$	$\begin{pmatrix} \frac{3m}{5}\left(\frac{R^2}{4}+h^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3m}{5}\left(\frac{R^2}{4}+h^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3m}{5}\frac{R^2}{2} \end{pmatrix}$

Corps homogène de masse m	Centre d'inertie	Matrice d'inertie
 cône creux : rayon R, hauteur h	$z_C = \frac{2h}{3}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}mR^2+\frac{1}{2}mh^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2+\frac{1}{2}mh^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{pmatrix}$
 demi sphère creuse : rayon R	$z_C = \frac{R}{2}$	$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}mR^2 \end{pmatrix}$
 ellipsoïde : axes $2a$, $2b$, $2c$	centre	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}m\left(b^2+c^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}m\left(a^2+c^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}m\left(a^2+b^2\right) \end{pmatrix}$
 tige rectiligne : longueur $2a$	centre	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 quart de cercle : rayon R	$x_C = y_C = \frac{2R}{\pi}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}mR^2 & \frac{1}{\pi}mR^2 & 0 \\ \frac{1}{\pi}mR^2 & \frac{1}{2}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{pmatrix}$
 quart de plaque elliptique : demi-axes a, b	$x_C = \frac{4a}{3\pi}$ $y_C = \frac{4b}{3\pi}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}mb^2 & \frac{1}{2\pi}mab & 0 \\ \frac{1}{2\pi}mab & \frac{1}{4}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}m(a+b)^2 \end{pmatrix}$

Corps homogène de masse m	Centre d'inertie	Matrice d'inertie
 secteur circulaire : rayon R	$x_C = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}mR^2\left(1-\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2\left(1+\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{pmatrix}$
 rectangle : a et b	centre	$\begin{pmatrix} \frac{4}{3}mb^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}m\left(a^2+b^2\right) \end{pmatrix}$
 tore plein : rayons R et a	centre	$\begin{pmatrix} m\left(\frac{a^2}{2}+\frac{5R^2}{8}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{a^2}{2}+\frac{5R^2}{8}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\left(a^2+\frac{3R^2}{4}\right) \end{pmatrix}$
 tore creux : rayons R et a	centre	$\begin{pmatrix} m\left(\frac{a^2}{2}+\frac{5R^2}{4}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{a^2}{2}+\frac{5R^2}{4}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\left(a^2+\frac{3R^2}{2}\right) \end{pmatrix}$
 pyramide : a, b, h	$x_C = \frac{h}{4}$	$\begin{pmatrix} m\left(\frac{b^2}{20}+\frac{h^2}{10}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{a^2}{20}+\frac{h^2}{10}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{20}\left(a^2+b^2\right) \end{pmatrix}$