Cours

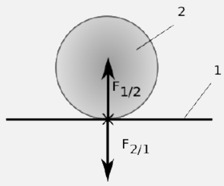
Vecteur Force, moment de force et torseur d'action mécanique

1 Principe d'interaction ou 3eme loi de Newton

Lorsqu'un objet 1 exerce une force sur un objet 2 alors celui-ci exerce sur l'objet 2 exerce sur l'objet 1 une force opposée :

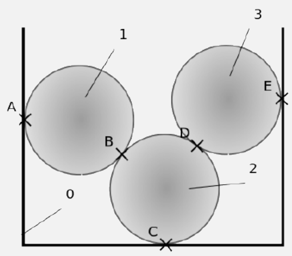
Principe d'interaction

$$\boxed{\overrightarrow{F_{1\to2}} = -\overrightarrow{F_{2\to1}}}$$



Application

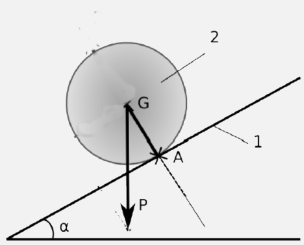
Placer les différentes actions mécaniques sur la figure ci-contre.



Application

La pièce 2 est en roulement sans glissement sur le plan incliné 1.

- **Tracer** les actions de $\overrightarrow{A_{1\to2}}$ et $\overrightarrow{A_{2\to1}}$
- **Exprimer** la réaction normale du support 1 sur l'objet 2 en fonction de la masse de l'objet 2 et de l'angle α



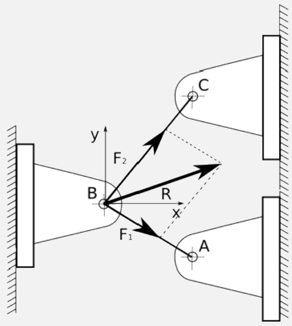
2 Résultante de forces

Lorsque plusieurs forces agissent simultanément sur un objet il peut être utile de modéliser l'ensemble de ces forces par un seul vecteur force appelé **Résultante**

Illustration

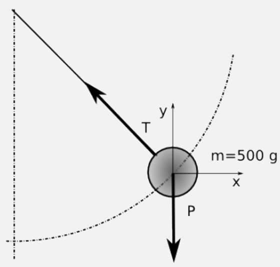
La résultante en B est obtenue en sommant vectoriellement les forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_1}$

$(\overrightarrow{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2})$



Application

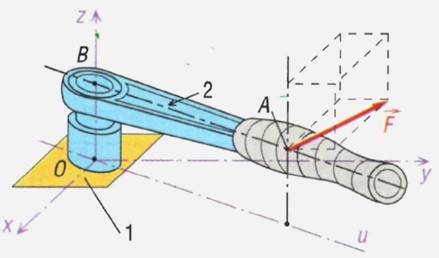
Dans le cas du pendule, **modéliser** graphiquement par un vecteur la résultante des forces.



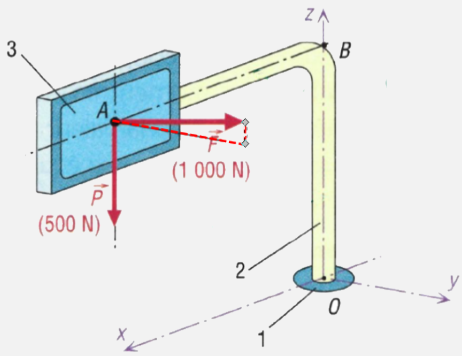
3 Moment d'une force par rapport à un point

Dès lors qu'une force a tendance à faire tourner ou empêcher de tourner un objet par rapport à un point, il est utile de calculer le moment de cette force. Un moment de force à donc tendance à vouloir mettre en rotation ou empêcher une rotation autour d'un point.

Illustrations



La force $\overrightarrow{F}$ crée un moment de force au point B qui à tendance à faire tourner autour de $\overrightarrow{z}$



Le poids $\overrightarrow{P}$ crée un moment de force au point B et au point O qui à tendance à faire tourner autour de $\overrightarrow{y}$. L'effet du vent modélisé par la force $\overrightarrow{F}$ crée un moment de force au point B et au point O qui à tendance à faire tourner autour de deux axes : $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{z}$.

3.1 Calcul d'un moment vectoriel

Le moment d'une force $\overrightarrow{F}$ s'exerçant au point P par rapport au point O, est un vecteur :

Formule vectorielle

$$\overrightarrow{M_O(\overrightarrow{F})} = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{F} \quad (1)$$

Le moment vectoriel $\overrightarrow{M_O(\overrightarrow{F})}$ est normal au plan de la figure 1 et dirigé vers nous.

où $\wedge$ désigne le produit vectoriel.
Avec :

- $\overrightarrow{M_O(\overrightarrow{F})}$ en $N \cdot m$
- $\overrightarrow{OP}$ en m (mètre)
- $\overrightarrow{F}$ en N (Newton)

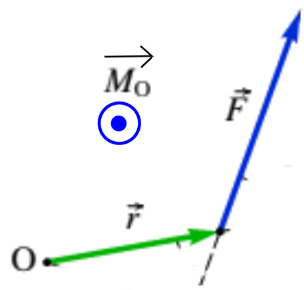


Figure 1: La force $\overrightarrow{F}$ a tendance à faire tourner le point P par rapport à O

La formule **vectorielle** précédente (1) très utile en 3 dimensions se décline dans le **domaine scalaire** (formule (2) ou (3) pour les cas simples en 2 dimensions.

3.2 Calcul d'un moment scalaire

Les deux formules scalaires 2 et 3 ci-après sont issues de la propriété du calcul de la norme d'une produit vectoriel :

$$\left\|\overrightarrow{r \wedge \overrightarrow{F}}\right\| = \|\overrightarrow{r}\| \cdot \left\|\overrightarrow{F}\right\| \cdot sin(\widehat{\overrightarrow{r}, \overrightarrow{F}})$$

Soit d'après la figure 2

$$\left\|\overrightarrow{r \wedge \overrightarrow{F}}\right\| = \|\overrightarrow{r}\| \cdot \left\|\overrightarrow{F}\right\| \cdot sin(\theta)$$

Cela revient au final à déterminer le bras de levier perpendiculaire à la force (noté $r \perp$) ou la composante de la force perpendiculaire à la direction de $\overrightarrow{r}$ (noté $F \perp$) sur la figure 2

Formule scalaire

$$M_O(\overrightarrow{F}) = r_\perp \cdot F \qquad (2)$$

$$M_O(\overrightarrow{F}) = r \cdot F_\perp \qquad (3)$$

Le moment scalaire $M_O(\overrightarrow{F})$ est orienté (sens de la flèche bleue) et compté positivement car il a tendance à faire tourner le point P dans le sens arbitraire trigonométrique.

Avec :

- $M_O(\overrightarrow{F})$ scalaire en $N{\cdot}m$
- r en m
- F en N

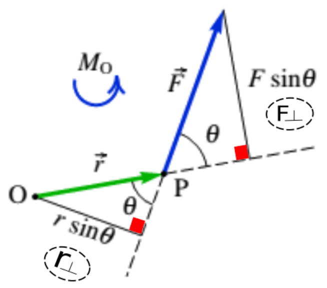


Figure 2: La force $\overrightarrow{F}$ a tendance à faire tourner le point P par rapport à O

Remarque

Le sens positif pour les moments scalaires est arbitraire mais il est logique de le prendre dans le sens trigonométrique car un moment **positif** aura tendance à faire tourner selon une direction "positive" par rapport au triède direct de référence (par exemple $+\overrightarrow{z}$). Un moment **négatif** aura tendance à faire tourner selon une direction "négative" par rapport au triède direct de référence (par exemple $-\overrightarrow{z}$)

3.3 Déplacement d'un moment

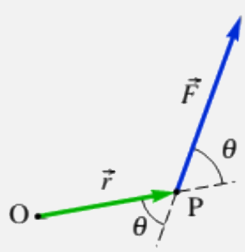
Un moment peut être exprimé en n'importe quel endroit.

Relation de Varignon

$$\overrightarrow{M_B(\overrightarrow{F})} = \overrightarrow{M_A(\overrightarrow{F})} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}$$

Exemple :

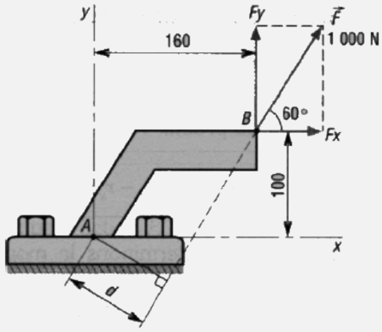
$$\overrightarrow{M_O(\overrightarrow{F})} = \overrightarrow{M_P(\overrightarrow{F})} + \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}$$



Application : calcul de moment vectoriel

Pour utiliser la formule vectorielle du moment il faut connaitre les composantes de $\overrightarrow{r}$ et de $\overrightarrow{F}$

- **Déterminer** les expressions des vecteurs lignes et colonne de $\overrightarrow{r}$ et de $\overrightarrow{F}$

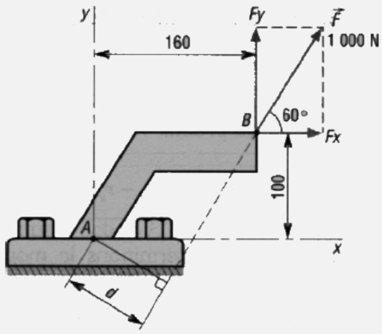


- **Déterminer** les expressions ligne et colonne du moment vectoriel $\overrightarrow{M_A(\overrightarrow{F})}$

- **Déterminer** la norme du moment vectoriel $\left\|\overrightarrow{M_A(\overrightarrow{F})}\right\|$

Application : calcul de moment scalaire par la formules scalaire (2 ou 3)

- **Déterminer** la valeur du bras de levier perpendiculaire
- **Déterminer** le moment scalaire $M_A(\overrightarrow{F})$ par les deux formules scalaires.



3.4 Définition des actions mécaniques par des torseurs

Toute action mécanique est entièrement caractérisée, d'un point de vue mécanique, par un torseur.

Le torseur d'action mécanique est défini de la manière suivante :

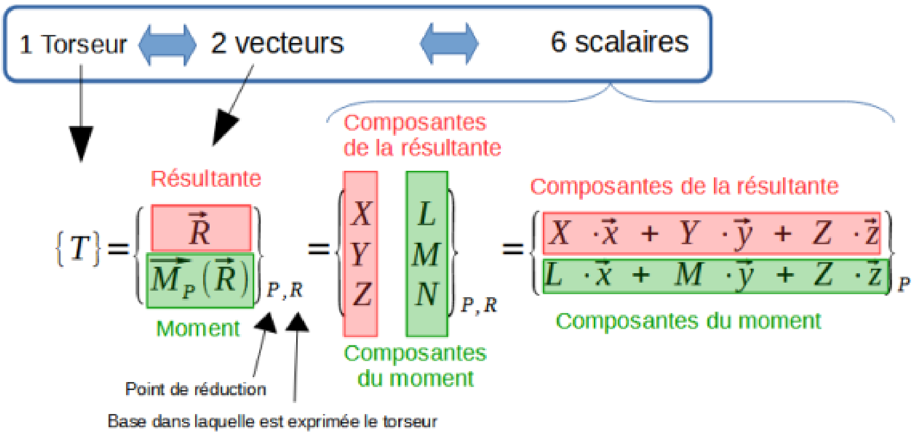


Figure 3: Expression d'un torseur d'action mécanique

Le torseur permet de caractériser l'action mécanique en n'importe quel point. Pour la figure 4, nous caractériserions l'ensemble des actions mécanique (Force et moment) dû à la force $\vec{F}$ au point P ou au point O.

Torseur exprimé en P

$$T = \left\{ \begin{matrix} \vec{F} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{P/R}$$

Torseur exprimé en O

$$T = \left\{ \begin{matrix} \vec{F} \\ \overrightarrow{M_{\vec{O}}(\vec{F})} \end{matrix} \right\}_{O/R}$$

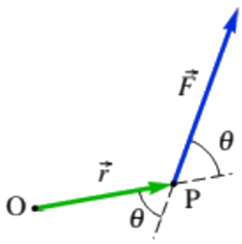


Figure 4: Moment d'une force $\vec{F}$

Application

- **Donner** le torseur d'action mécanique dû à la force $\vec{F}$ écrit/réduit en B
- **Déplacer** le torseur précédent au point A.