COURS

Modélisation des actions mécaniques

1 Préambule

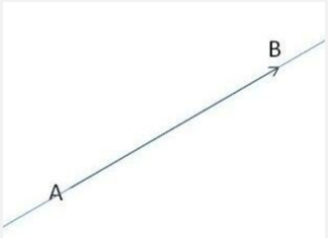
Stop !! On ne part pas en courant...

Les formules présentées dans ce cours sont écrites sous forme **vectorielle** ce qui peut être rebutant. Pourtant, les subtilités une fois comprises , ces écritures sont d'une puissance remarquable !!

Pourquoi utiliser une écriture vectorielle ?

Par définition, un vecteur se caractérise par :

- une direction de droite (AB)
- un sens (de A vers B)
- une norme (égale à la longueur [AB])



¨Prenons deux exemples ...

$\overrightarrow{u} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$ indique que :

- la norme de $\overrightarrow{u}$ ($\|\overrightarrow{u}\|$) vaut 2 fois la norme de $\overrightarrow{AB}$ ($\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$)
- La direction de $\overrightarrow{u}$ est la **même** que celle de $\overrightarrow{AB}$
- Le sens de $\overrightarrow{u}$ est le **même** que celle de $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{v} = -3 \cdot \overrightarrow{AB}$ indique que :

- la norme de $\overrightarrow{v}$ ($\|\overrightarrow{v}\|$) vaut 3 fois la norme de $\overrightarrow{AB}$ ($\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$)
- La direction de $\overrightarrow{v}$ est la **même** que celle de $\overrightarrow{AB}$
- Le sens de $\overrightarrow{v}$ est **opposé** à celui de $\overrightarrow{AB}$

Kesako "vecteur unitaire" ?

Lors de l'écriture vectorielle, il est parfois nécessaire de créer un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ avec $\|\overrightarrow{u}\| = 1$.

Cependant ce vecteur unitaire est susceptible de changer de **sens**, c'est le cas des frottements qui sont toujours opposés au déplacement (le sens du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ en l'occurrence).

Pour créer un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ en fonction du vecteur vitesse il suffit de **diviser le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ par la norme de ce vecteur vitesse** $\|\overrightarrow{v}\|$, soit $\overrightarrow{u} = \dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$

2 Introduction au Bilan des Actions Mécaniques Extérieures (B.A.M.E)

Quand il s'agit de statique et/ou de dynamique, il est nécessaire de modéliser les actions mécaniques extérieures au système étudié.

Ainsi l'objectif de ce cours est de sensibiliser les élèves aux actions mécaniques essentiellement dans le domaine de la translation, c-à-d que nous évoquerons de manière privilégiées les forces, les moments de force et couples seront abordés plus en détail ultérieurement.

Exemple de bilan des actions mécaniques extérieures

Afin de déterminer les performances cinématiques (vitesses, accélérations) dans le cas du skieur il est nécessaire de réaliser ce que l'on appelle un B.A.M.E (Bilan des Actions Mécaniques Extérieures).

Connaissant la masse m du skieur et l'ensemble des forces qui s'appliquent au skieur, il est possible de déterminer l'accélération a_G en appliquant le **théorème de la résultante dynamique** [a] $\Sigma\overrightarrow{F_{ext}} = m \cdot \overrightarrow{a_G}$

Essayons d'inventorier sur la figure 1 l'ensemble des forces agissant sur le skieur ...

[a] Appelée Deuxième loi de Newton en physique

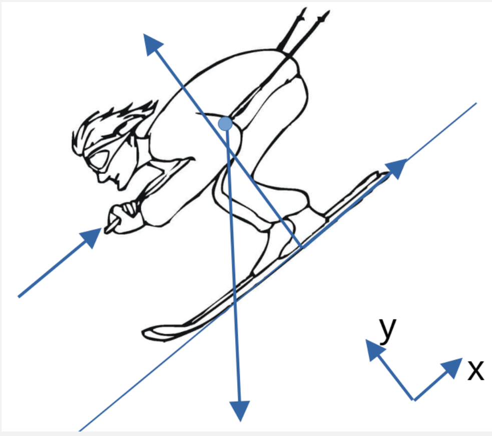


Figure 1: Bilan des actions mécaniques extérieures sur le skieur

On s'aperçoit que les inventorier ne suffit pas, il faut également les quantifier, d'où la suite du cours !

3 Inventaire des actions mécaniques les plus courantes en Sciences de l'ingénieur

1. Dans le domaine de la translation (les forces)
   - le poids $\overrightarrow{P} = m \cdot \overrightarrow{g}$
   - la poussée d'Archimède $\overrightarrow{P_A} = -\rho_f \cdot V_f \cdot \overrightarrow{g}$
   - les frottements
     - frottements Solides (encore appelés frottements Secs) $\overrightarrow{F} = -k_s \cdot \dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$
     - frottements Fluides [1]
       * Visqueux (régime laminaire) $\overrightarrow{F} = -k_v \cdot \overrightarrow{v}$
       * Turbulents (régime turbulent) $\overrightarrow{F} = -\dfrac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_x \cdot v^2 \cdot \dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$
   - la résistance au roulement $\overrightarrow{R_r} = -C_{rr} \cdot P \cdot \dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$
   - force de rappel d'un ressort $\overrightarrow{F_r} = -k \cdot \Delta l \cdot \overrightarrow{u}$
   - force de pression $\overrightarrow{F_p} = p \cdot S \cdot \overrightarrow{n}$
2. Dans le domaine de la rotation (moments de forces et couples)
   - Couples et moments dus aux mécanismes entraînés
   - Couples de frottements solides $\overrightarrow{C_f} = -k \cdot \dfrac{\overrightarrow{\Omega}}{\left\|\overrightarrow{\Omega}\right\|}$
   - Couples de frottements Fluides
     - couple de frottements solides $\overrightarrow{C_f} = -k \cdot \dfrac{\overrightarrow{\Omega}}{\left\|\overrightarrow{\Omega}\right\|}$
     - couples de frottement Fluides
       * Visqueux $\overrightarrow{C_f} = -k \cdot \overrightarrow{\Omega}$
       * Turbulents $\overrightarrow{C_f} = -k \cdot \Omega^2 \cdot \dfrac{\overrightarrow{\Omega}}{\left\|\overrightarrow{\Omega}\right\|}$
   - Couple de résistance au pivotement

[1] le régime visqueux ou turbulent est fonction de la vitesse d'écoulement du fluide. On se situe très rarement en régime laminaire

3.1 Les actions mécaniques en détail

3.2 Le poids

Un solide (S) (ici l'avion figure 2) constitué de matériaux est constitué d'éléments microscopiques présentant chacun une masse infinitésimale [a] (dm). Ses masses microscopiques sont attirées par la terre et soumisent à une force gravitationnelle appelée *Poids*.

Il est bien évident que l'on ne peut pas prendre en compte chacun de ses poids pour mener les calculs. On va donc se simplifier la vie en appliquant le poids total du solide de masse m (avec $m = \int dm$) à un endroit précis de l'avion appelé indifféremment :

- centre de gravité
- centre de masse
- centre d'inertie

[a] infinitésimable = infiniement petit

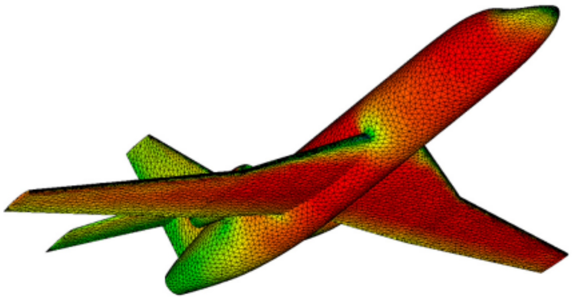


Figure 2: Répartition des masses sur un avion

Le poids d'un objet de masse m est la force gravitationnelle qu'il subit de par son interaction avec la Terre. Il s'écrit de manière vectorielle de la façon suivante :

Expression du vecteur Poids

$$\overrightarrow{P} = \overrightarrow{F_{terre/1}} = m \cdot \overrightarrow{g} = -m \cdot g \cdot \overrightarrow{z}$$

Avec :

- P : poids (en N)
- m : la masse de l'objet (en kg)
- g : l'accélération de pesanteur $g = 9,81\ m \cdot s^{-2}$

Remarque :
$\overrightarrow{g}$ est dirigé vers le bas [a] et vaut donc $\overrightarrow{g} = -g \cdot \overrightarrow{z}$ avec $\overrightarrow{z}$ dirigé vers le haut.

[a] Très exactement vers le centre de la terre

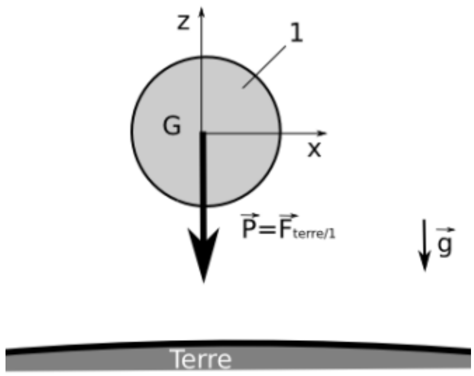


Figure 3: Modélisation du vecteur poids $\overrightarrow{P}$ appliqué au centre de gravité G

Figure 4: Lien vers Glossaire Insyte.website vers quelques vidéos

Application

Déterminer la norme du poids du skieur $\left\|\overrightarrow{P}\right\|$ si celui-ci a une masse $m_s = 75\ kg$.

3.3 La poussée d'Archimède

Dès lors qu'un objet est dans une fluide (air, eau, huile, etc), cet objet subit une force dirigée vers le "haut" appelée **poussée d'Archimède**.
Elle est naturellement négligée dès lors que le poids de l'objet est très supérieur à la poussée d'Archimède exercée sur l'objet, c'est le cas d'un objet dans l'air (tous les objets qui nous entourent, nous y compris, sont soumis à une poussée d'Archimède car ceux-ci sont immergés dans l'air).
La poussée d'Archimède s'exprime de manière vectorielle de la façon suivante :

Expression du vecteur Poussée d'Archimède

$$\overrightarrow{P_A} = \overrightarrow{A} = \overrightarrow{\Pi} = \overrightarrow{F_{fluide/1}} = -\rho_f \cdot V_f \cdot \overrightarrow{g}$$

Avec :

- ρ_f : la masse volumique du fluide déplacé (en $kg \cdot m^{-3}$)
- V_f : volume du fluide déplacé (en m^3)
- $\overrightarrow{g}$: vecteur accélération de pesanteur $g = 9,81\ m \cdot s^{-2}$

Remarque :
$\overrightarrow{g}$ est dirigé vers le bas et vaut donc $\overrightarrow{g} = -g \cdot \overrightarrow{z}$ avec $\overrightarrow{z}$ dirigé vers le haut.

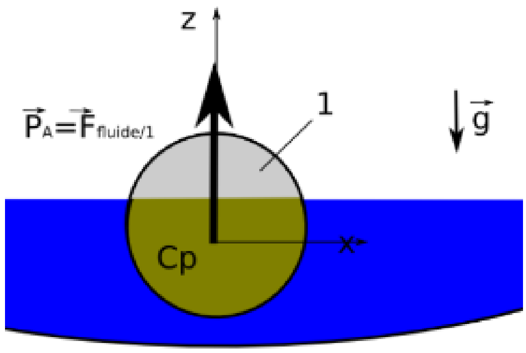


Figure 5: Modélisation du vecteur Poussée d'Archimède $\overrightarrow{P_A}$ appliqué au centre de poussée C_p

Figure 6: Lien vers Glossaire Insyte.website vers quelques vidéos

Application

Déterminer le volume d'eau de mer (de masse volumique $\rho_{em} = 1025\ kg \cdot m^{-3}$ que doit déplacer un objet de masse $m_1 = 40\ kg$ pour que celui flotte.

Rappel : condition de flottabilité

Pour qu'un objet flotte, il faut que la poussée d'Archimède soit égale au poids de l'objet en question, soit $\overrightarrow{P_A} = \overrightarrow{P_{objet}}$

Déterminer si l'objet de volume $V_{obj} = 30\ L$ flotte ou coule.

3.4 Les frottements

En mécaniques on parle deux de catégories de frottements :

Les frottements Solides
(encore appelés frottements Secs)

$$\overrightarrow{F} = -k_s \cdot \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$$

Avec $k_s = \mu \cdot \left\|\overrightarrow{N}\right\|$

Les frottements solides sont déterminés à partir de **la loi de Coulomb** [a] **:**

[a]Cette loi sera vue en détail lors du cours relatif aux phénomènes d'adhérence et glissement

Les frottements Fluides

- Visqueux (régime laminaire)
  $\overrightarrow{F} = -k_v \cdot \overrightarrow{v}$
- Turbulents (régime turbulent)[a]
  $\overrightarrow{F} = -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_x \cdot v^2 \cdot \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$

[a]le régime visqueux ou turbulent est fonction de la vitesse d'écoulement du fluide. On se situe très rarement en régime laminaire

Définition des variables des formules précédentes

Avec :

- $\overrightarrow{F}$: force de frottement (en N) (solide, visqueux ou turbulent)
- k_s : constante de frottement Solide (en N)
- k_v : constante de frottement Visqueux (en $N \cdot m^{-1}$)
- ρ : masse volumique du fluide dans lequel se déplace le solide (en $kg \cdot m^{-3}$)
- S : section apparente (en m^2)
- C_x : Coefficient de traînée (sans unité)
- v : vitesse du solide (en $m \cdot s^{-1}$)
- $\overrightarrow{v}$: vecteur vitesse
- $\|\overrightarrow{v}\|$: norme du vecteur vitesse (en $m \cdot s^{-1}$)
- $\frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$: vecteur unitaire dirigé dans le sens de la vitesse.
- $\left\|\overrightarrow{N}\right\|$: norme de la force **Normale** (en N).
- μ : coefficient de frottement cinématique [a]. Celui dépend de la paire de matériaux en contact (cf. figure 7).

[a]il existe un coefficient μ_s dit **statique** qui caractérise la force d'adhérence (pas de glissement $\Rightarrow$ pas de frottement = adhérence)

3.4.1 Frottements solides (secs)

	Adhérence (µs)		Frottement (µ)	
Paire de matériaux	*Sec*	*Lubrifié*	*Sec*	*Lubrifié*
Acier / acier	0.18	0.12	0.15	0.09
Acier / fonte	0.19	0.1	0.16	0.08 à 0.04
Téflon / acier	0.04		0.04	
Métal / glace			0.02	
Fonte / Caoutchouc	0.8	0.2	0.3	0.1
Pneu voiture / route	0.8		0.6	

Source : wikipédia

Figure 7: Quelques valeurs de coefficient μ (glissement) et μ_s (adhérence)

3.4.2 Frottements fluides turbulents

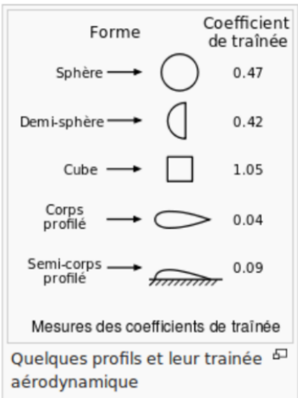


Figure 8: Coefficient de traînée

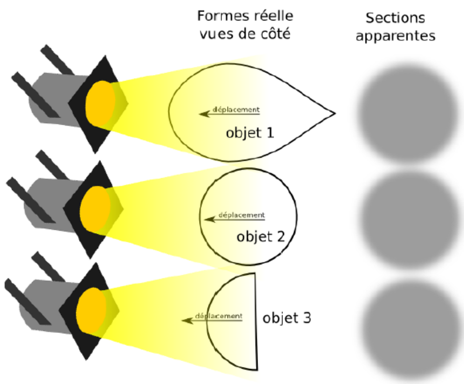


Figure 9: Illustration section apparente

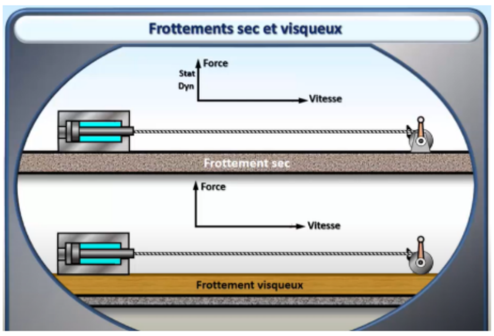


Figure 10: Animation Frottements secs et visqueux

Figure 11: Lien vers Glossaire Insyte.website vers quelques vidéos

Application : frottements solides

Déterminer la force de frottement solide du skieur (cf. figure 1). (On considérera le coefficient μ de la paire de matériau *neige / ski* identique au coefficient μ la paire de matériaux *métal/glace*.

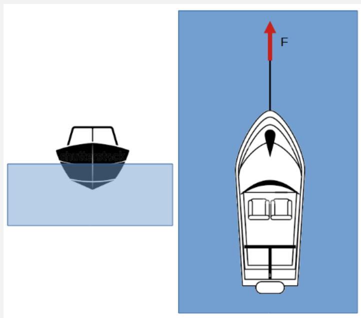
Aide : la composante normale $\left\|\overrightarrow{N}\right\|$ est égale à la composante du poids $\overrightarrow{P}$ selon $\overrightarrow{y}$

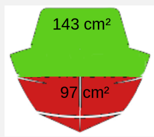
Application : frottements fluides turbulents

On souhaite pour des besoins de simulation multiphysique connaître le C_x d'une coque de bateau de modélisme. Pour se faire, la coque est immergée jusqu'à sa profondeur de travail dans de l'eau douce. On traîne la coque en tirant par l'intermédiaire d'une ficelle et d'un dynamomètre [a].

Les relevés sont les suivants :

- vitesse d'entraînement $v_e = 1\ m \cdot s^{-1}$
- force d'entraînement (obtenue à vitesse constante) $F_e = 7\ N$
- Section apparente immergée $S_i = 97\ cm^2$
- Section apparente hors d'eau $S_{he} = 143\ cm^2$
- masse volumique de l'eau douce $\rho_{eau} = 1000\ kg \cdot m^{-3}$
- masse volumique de l'air $\rho_{air} = 1,2\ kg \cdot m^{-3}$





Calculer le produit $\rho \cdot S_{he}$ et $\rho \cdot S_i$.
Préciser s'il est envisageable de négliger l'influence de la partie hors d'eau pour le calcul de la traînée hydrodynamique.
Déterminer le Cx du bateau à partir des relevés expérimentaux.

[a] Un dynamomètre est un appareil de mesure permettant de mesurer directement les forces en Newton

3.5 La résistance au roulement

On a tous déjà constaté qu'il est plus difficile d'avancer sur un vélo lorsque les pneus sont sous-gonflés. Cette difficulté accrue est due à la résistance au roulement. Il s'agit d'une force qui s'oppose au déplacement.

3.5.1 Mise en situation

La vidéo ci-contre met en évidence l'utilisation de pneus avec des coefficients de résistance au roulement différents. Les deux voitures sont bien évidemment identiques pour que la traînée aérodynamique soit la même sur les deux véhicules ainsi que le poids
.

Figure 12: Lien vers vidéo d'illustration de la résistance au roulement

3.5.2 Origine de la résistance au roulement

Sous l'effet d'un effort presseur (le poids du véhicule dans le cas des pneus), la partie qui roule sans glisser (le pneu pour les véhicules), se déforme en formant un « plat » avec la partie en contact avec le sol. Cette déformation crée un couple résistant à vaincre dans le cas de roues motrices ou une force de résistance à l'avancement dans le cas de roues libres.

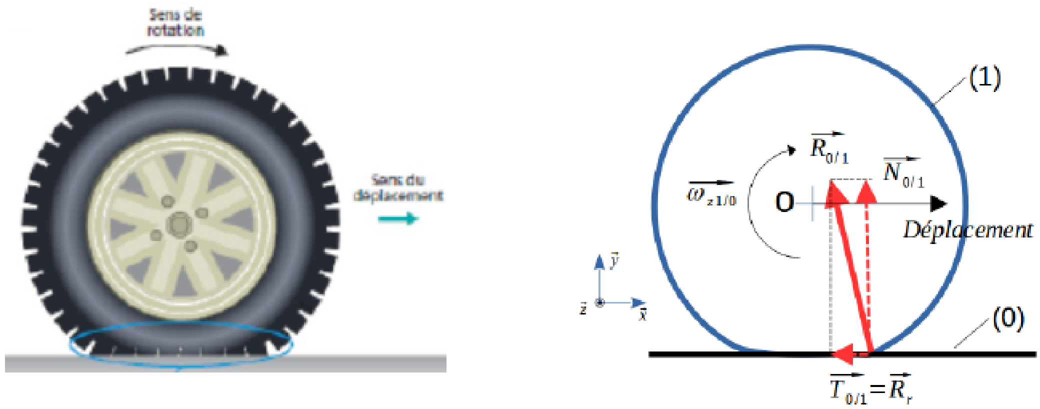


Figure 13: Modélisation de la résistance au roulement

Le sol (0) crée une réaction $R_{0/1}$ à l'avant du solide (1).

Les conséquences sont les suivantes :

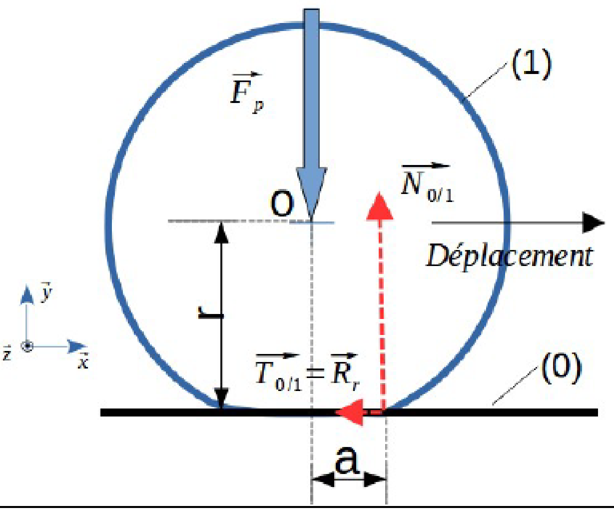
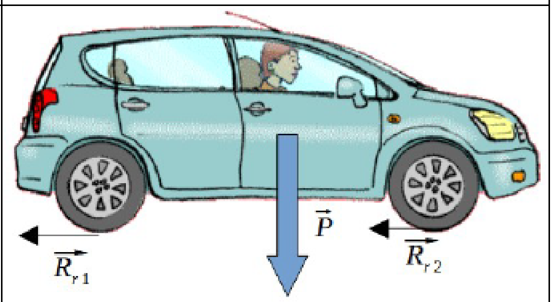
- l'effort tangentiel $T_{0/1}$ crée une résistance à l'avancement que l'on nomme communément **résistance au roulement** R_r

ou

- un couple moteur sur l'axe de rotation placé en « O » est nécessaire pour vaincre le moment résistant crée par $N_{0/1}$ par rapport à l'axe de rotation en « O » dans le cas d'une roue motrice.

3.5.3 Détermination de la résistance au roulement

Selon le domaine, Il existe deux manières de l'exprimer mais cela revient au même !

<table>
<tr><th>En mécanique</th><th>Pour les véhicules roulants</th></tr>
<tr><td>$$R_r = \frac{a}{r} \cdot F_p = \mu_r \cdot F_p$$
Rr : Résistance au roulement (N)
a : Décalage par rapport à l'aplomb de l'axe (mm) également appeler « résistance au roulement » !
r : Rayon du solide en roulement (mm)
Fp : Effort presseur (N) (= $N_{0/1}$)</td><td>$$R_r = C_{rr} \cdot P$$
Rr : Résistance au roulement (N)
Crr : Coefficient de résistance au roulement
P : Poids du véhicule</td></tr>
<tr><td>
</td><td>

La formule précitée fournit la résistance au roulement global du véhicule. $R_r = \sum R_{ri}$</td></tr>
</table>

Figure 14: Détermination de la force de résistance au roulement R_r

3.5.4 Détermination du couple moteur nécessaire à vaincre la résistance au roulement (cas des roues motrices)

Le couple moteur se calcule de la manière suivante : $C_m = a \cdot F_p$

avec :

- $F_p = N_{0/1}$ (N) : effort presseur
- C_m : couple moteur $(N \cdot mm)$
- a : Décalage par rapport à l'aplomb de l'axe (mm) également appeler « résistance au roulement » ! (mm)

Ce résultat peut paraître surprenant étant donnée qu'*a priori*, la composante normale $N_{0/1}$ et la composante tangentielle $T_{0/1}$ créent un moment de force en « O » à vaincre par le couple moteur Cm. Cependant, la composante tangentielle n'existe que si $C_m > 0$

3.5.5 Coefficients de résistance au roulement

(source Wikipedia)

- Véhicules roulants

C_{rr}	Description
0,000 3 à 0,000 4 [2]	Roue de chemin de fer en acier sur rail en acier (résistance au roulement statique)
0,001 à 0,001 5 [3]	Roulement à billes en acier durci sur acier
0,001 0 à 0,002 4 [4, 5]	Roue de chemin de fer en acier sur rail en acier. Wagon de passager environ 0.0020 [6]
0,001 9 à 0,006 5 [7]	Roues en fonte de véhicules miniers sur rails en acier
0,002 2 à 0,005 [8]	Pneus de bicyclette de production pour 8,3 bar et 50 km/h
0,002 5 [9]	Pneus spéciaux éco-marathon
0,005	Rails sales de tramway (standard) avec et sans virages
0,004 5 à 0,008 [10]	Pneus de grands camions
0,005 5 [9]	Pneus BMX de bicyclettes typiques pour voitures solaires
0,006 2 à 0,015 [11]	Mesure de pneus de voiture
0,010 à 0,015 [12]	Pneus de voitures ordinaires sur béton
0,038 5 à 0,073 [13]	Diligence (XIXe siècle) sur une route sale. Neige molle sur la route dans le pire cas
0,3 [12]	Pneus de voitures ordinaires sur sable

Figure 15: Coefficients de résistance au roulement

- En mécanique

Matériaux (roue sur plan)	a (mm)
acier sur acier	0,4
fonte sur acier	0,5
caoutchouc plein sur bitume	3 à 15
pneu sur bitume	20 à 30
acier sur béton	10 à 15
acier sur rail (chemin de fer)	0,5 à 1

Figure 16: Coefficient résistance au roulement pour une roue de 1 m

Dispositif	μ_R
roulement à billes	0,001 5
roulement à rouleaux	0,002
roulement à aiguilles	0,004

Figure 17: Coefficient résistance au roulement pour les roulements et paliers

Application

Le C_{rr} indiqué par le constructeur des pneus pour la voiture fig. 18 est de 6 $kg \cdot t^{-1}$

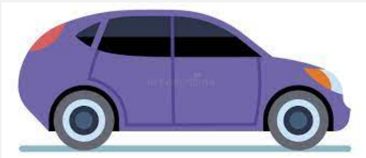


Figure 18: Résistance roulement voiture

Dans le cadre de l'application, la voiture se déplace en marche arrière.
Flécher sur la figure 18 les forces de résistance au roulement.
Déterminer la force de résistance au roulement globale.

Lien vers Glossaire In-syte.website vers quelques vidéos

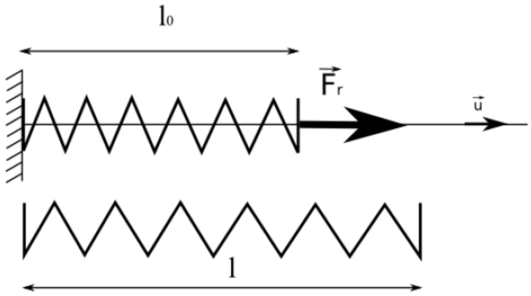
4 La force de rappel d'un ressort

La force de rappel d'un ressort se calcule de la manière suivante :

Force de rappel d'un ressort

$$\overrightarrow{F_r} = -k \cdot \Delta l \cdot \overrightarrow{u}$$

avec :
k : constante de raideur du ressort ($N \cdot m^{-1}$)
$\Delta l = l - l_0$: variation de longueur du ressort (m)
l_0 : longueur à vide du ressort (m)



Remarque 1 : Δl est soit positif (étirement du ressort) soit négatif (contraction du ressort).
Remarque 2 : $\overrightarrow{u}$ est orienté sortant du ressort.

Application 1

Déterminer la force de rappel d'un ressort dont la longueur totale vaut $l = 10\ cm$ dont les caractéristiques sont les suivantes :

$k = 100\ N \cdot m^{-1}$
$l_0 = 5\ cm$: longueur à vide du ressort (m)

Application 2

À partir de la figure 19, **déterminer** la direction des forces de rappel des deux ressort

Déterminer la longueur totale de ressort dans chacune des situations pour une masse $m = 1\ kg$, une constante de raideur $k = 2\ N \cdot mm^{-1}$ et la longueur à vide du ressort $l_0 = 4\ cm$

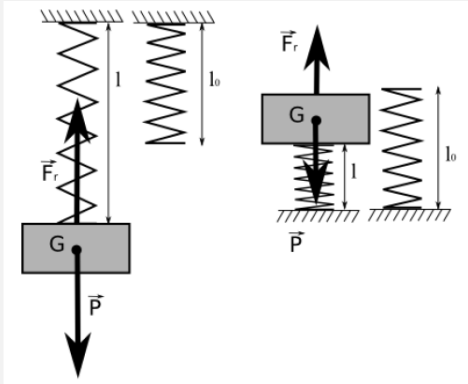


Figure 19: Ressorts soumis à un effort vertical

Application 3

Proposer un protocole expérimental pour déterminer la constante de raideur d'un ressort qui vous serait mis à disposition. **Inventorier** les appareils de mesure nécessaires.

5 La force de pression

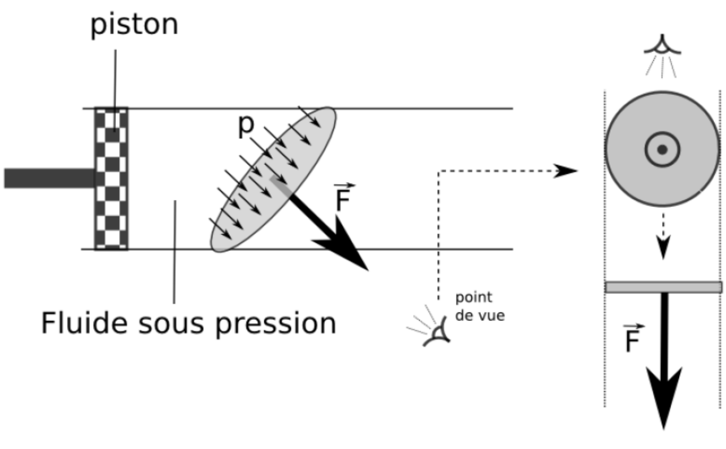
La force de pression est l'action mécanique créée par un fluide exerçant une pression à la surface d'une paroi.

Force de pression

$\overrightarrow{F_{Fluide \longrightarrow (S)}} = \overrightarrow{F_p} = p \cdot \overrightarrow{S} = p \cdot S \cdot \overrightarrow{n}$

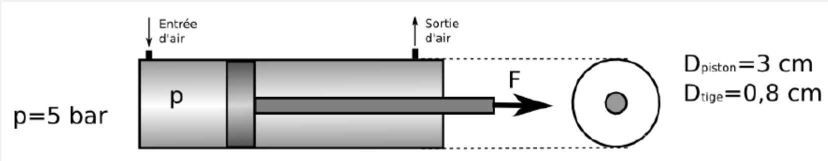
avec :
p : pression (P_a)
S : surface sur laquelle agit la pression (m^2)
$\overrightarrow{n}$: vecteur unitaire ($\|\overrightarrow{n}\| = 1$) normal à la surface soumise à la pression et orienté vers l'extérieur.

Remarque : la formule scalaire suffit la plupart du temps. $F_p = p \cdot S$



Application 1

Placer sur la figure ci-dessous le vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$. **Indiquer** si le sens de la force $\overrightarrow{F}$ est dans le bon sens en justifiant.
Calculer la force exercée par la tige du vérin.



Application

L'exemple précédent est un peu simpliste car nous ne tenons pas compte de la contre pression régnant dans la chambre coté tige.
Placer sur la figure ci-dessous les vecteurs unitaires $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ainsi que les forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ sachant que la force résultante $\overrightarrow{F}$ vaut $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$
Calculer les normes de chacune des forces $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ et la force résultante $\overrightarrow{F}$ (force réellement exercée par la tige du vérin).