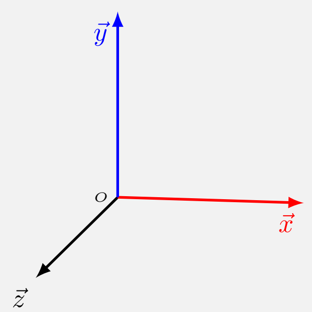
DOCUMENT RESSOURCE

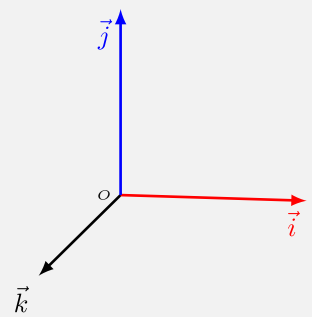
Produit vectoriel

1 Rappels sur le repère orthonormés

Dès lors que l'on évoque des vecteurs dans l'espace ou dans le plan il est nécessaire de les référencer par rapport à un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ ou en mathématiques plus souvent utilisé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Repères orthonormés fréquemment utilisés





Un repère orthonormé signifie :

- **Ortho :** Tous les vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ (ou $\vec{i}$, $\vec{i}$ et $\vec{k}$) sont perpendiculaires deux à deux.
- **Normé :** Tous les vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ (ou $\vec{i}$, $\vec{i}$ et $\vec{k}$) ont pour norme "1".
  $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| = \|\vec{z}\| = 1$ (ou $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$)

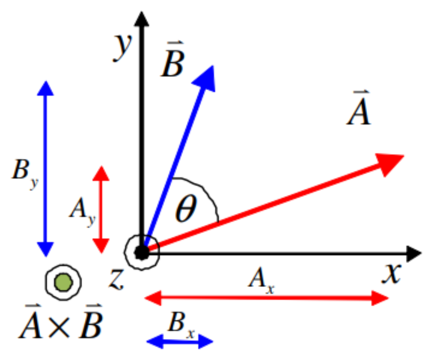
2 Définition du produit vectoriel

Le produit vectoriel est une opération algébrique entre deux vecteurs dont **le résultat est un vecteur**.
On utilise l'opérateur "$\wedge$" ou "$\times$" pour désigner le produit vectoriel selon les ouvrages scientifiques.

Soit deux vecteur $\vec{A}$ et $\vec{B}$ ayant pour composantes :
$\vec{A}\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ et $\vec{B}\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$ dont les normes respectives sont $\|\vec{A}\| = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}$ et $\|\vec{B}\| = \sqrt{{B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2}$

$\vec{A} \wedge \vec{B}$: produit vectoriel entre les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

θ : angle entre les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.



Que vaut $\vec{A} \wedge \vec{B}$?

Vous le savez déjà à partir de la définition encadrée ci-avant que cela donne un vecteur …oui mais de quelle direction, quel sens et quelle norme ?

La direction et le sens :

La direction et le sens sont définis par la règle de la main droite (ou tire-bouchon facilement praticable avec un stylo 4 couleurs).

Le produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{B}$ sera **toujours "normal" au plan** formé par les deux vecteurs (ici $\vec{A}$ et $\vec{B}$).

Le sens est défini par l'orientation des doigts outre le pouce.
L'orientation des doigts indique que l'on fait $\vec{A} \wedge \vec{B}$ (on se "déplace" de $\vec{A}$ vers $\vec{B}$) et non $\vec{B} \wedge \vec{A}$ (le produit vectoriel n'est pas commutatif !).
le pouce indique le sens du vecteur.

Il est possible de définir le vecteur normal au plan "$\widehat{n}$" de la manière suivante :

$$\widehat{n} = \frac{\vec{A} \wedge \vec{B}}{\|\vec{A} \wedge \vec{B}\|} \text{ avec } \widehat{n} = \vec{n} \text{ et } \|\widehat{n}\| = 1$$

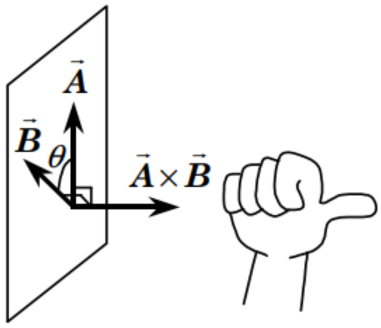
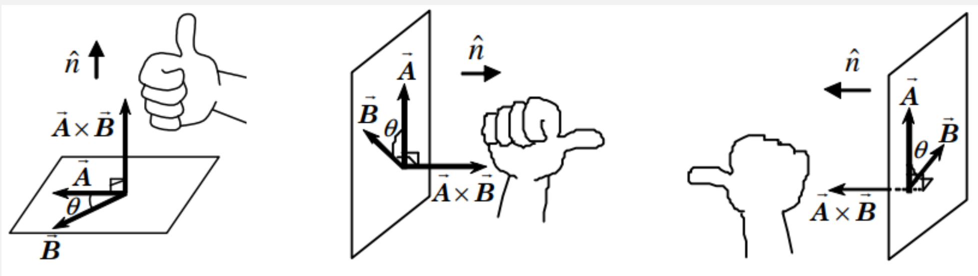


Figure 1: Orientation du produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{B}$ à l'aide de la règle de la main droite

Quelques exemples



La norme $\|\vec{A} \wedge \vec{B}\|$:

Calcul de la norme de $\vec{A} \wedge \vec{B}$

La norme se calcule deux manières :

- $\|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot sin\theta$ Il faut connaître θ.
- $\|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ avec α, β et γ les composantes $\vec{A} \wedge \vec{B}$ tel que $\vec{A} \wedge \vec{B} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

Détermination des composantes de $\vec{A} \wedge \vec{B}$

Calcul des composantes de $\vec{A} \wedge \vec{B}$

$\vec{A}\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ et $\vec{B}\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$

Pour la détermination des composantes α, β et γ, on répète volontairement la première ligne à la fin ...

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \\ A_x \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \\ B_x \end{pmatrix}$$

puis on applique la même méthode que le calcul du déterminant entre deux vecteurs.

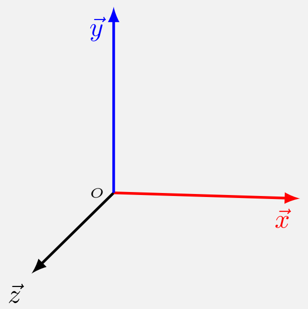
$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_y \cdot B_z - A_z \cdot B_y \\ A_z \cdot B_x - A_x \cdot B_z \\ A_x \cdot B_y - A_y \cdot B_x \end{pmatrix}$$

3 Quelques propriétés du produit vectoriel

- **Distributivité :** $\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$
- **Anticommutativité :** $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$
- **Produit vectoriel de vecteurs unitaires d'une base directe orthonormée :**

$\vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{z} \qquad \vec{y} \wedge \vec{z} = \vec{x} \qquad \vec{z} \wedge \vec{x} = \vec{y}$

$\vec{y} \wedge \vec{x} = -\vec{z} \qquad \vec{z} \wedge \vec{y} = -\vec{x} \qquad \vec{x} \wedge \vec{z} = -\vec{y}$



- **Produit vectoriel nul :** $\vec{x} \wedge \vec{x} = \vec{0}$, $\vec{y} \wedge \vec{y} = \vec{0}$, $\vec{z} \wedge \vec{z} = \vec{0}$

4 Application

Application

Soit les vecteurs suivants : $\vec{A}\begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{B}\begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}$

- **Déterminer** les composantes et la norme du produit vectoriel $\vec{A}\wedge\vec{B} = \begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}$
- **Déterminer** l'angle entre les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$