

COURS

Cinématique du point matériel et cinématique du solide indéformable

1 Définition

La cinématique est l'étude du mouvement indépendamment des causes de ce mouvement. Elle permet d'étudier les relations entre les paramètres permettant de décrire le mouvement (position, vitesse, accélération...).

En mécanique on distingue :

- la **cinématique du point** matériel
- la **cinématique du solide**

Par définition **un point matériel** ne peut être qu'en translation :

- rectiligne
- circulaire
- curviligne

Un **solide** quant à lui peut être en :

- Translation (rectiligne, circulaire, curviligne)
- Rotation
- Mouvement Plan (translation + rotation combinées).

Illustrations : échelle qui glisse

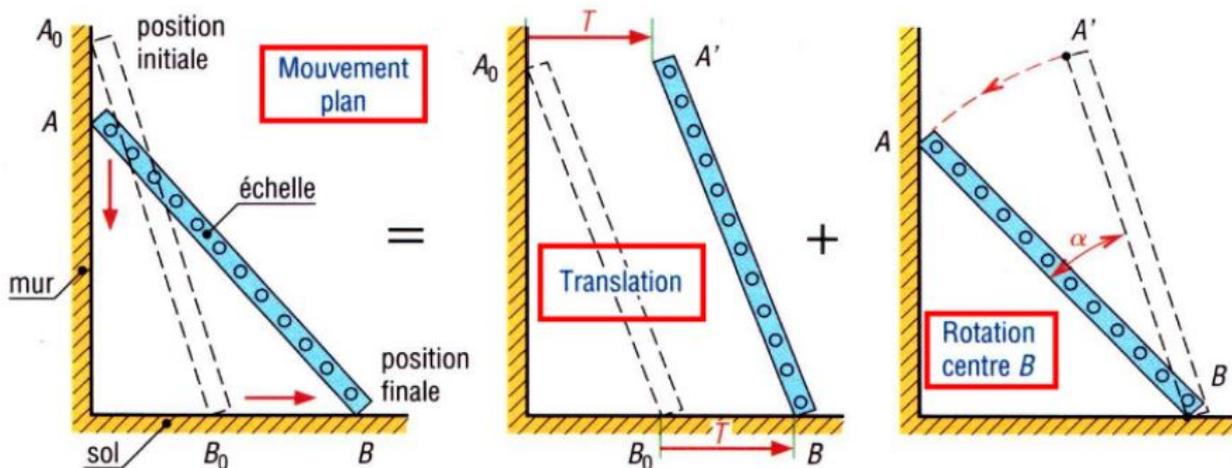


Figure 1: Les trois types de mouvements d'un solide

La figure 1 illustre bien les trois types de mouvements d'un solide (plan, translation et rotation). Lorsque l'échelle glisse, le mouvement est qualifié de **mouvement plan**, c'est à dire la combinaison d'un **mouvement de translation** et d'un **mouvement de rotation**. Cette décomposition n'est qu'une vue de l'esprit. Le **mouvement plan** ne s'effectue pas comme cela (càd de manière décomposée) mais les deux mouvements translation et rotation **en même temps** !

Observons à présent les points A_0, A, A', B_0, B et B' :

$$\left. \begin{array}{l} A_0 \rightarrow A \\ B_0 \rightarrow B \\ A_0 \rightarrow A' \end{array} \right\} : \text{translation rectiligne.} \quad \left. \begin{array}{l} A' \rightarrow A \end{array} \right\} : \text{translation circulaire.}$$

On constate que malgré que le solide (ici l'échelle) soit en **mouvement plan** (translation et rotation combinées), les points quant à eux ne sont qu'en translation (rectiligne, circulaire ou curviligne).

La mécanique du point ne suffit donc pas à caractériser la cinématique d'un solide !

2 Notion de mouvement et de trajectoire

Lorsque l'on parle de mouvement, il est impératif de préciser :

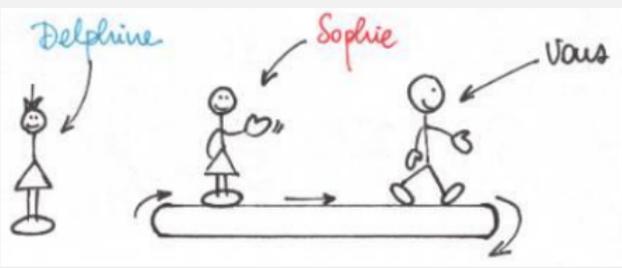
- le point ou le solide dont on observe le mouvement
- le point ou le solide de référence par rapport auquel on observe le mouvement

Composition de mouvements

$$Mvt_{3/1} = Mvt_{3/2} + Mvt_{2/1}$$

Exemple

Sur l'exemple du trottoir roulant, on peut étudier le mouvement de sophie par rapport à Delphine, de vous par rapport à sophie ou de vous par rapport à Delphine



$$Mvt_{vous/Delphine} = Mvt_{vous/Sophie} + Mvt_{sophie/Delphine}$$

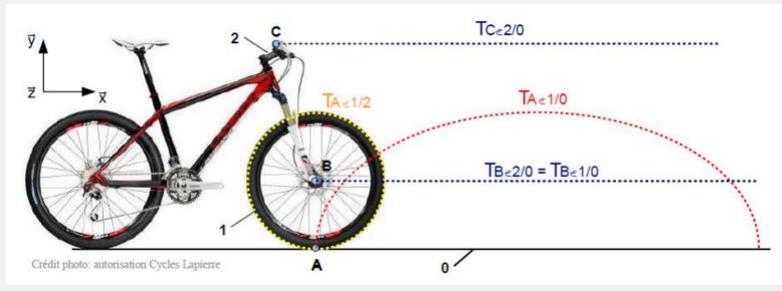
ou

$$Mvt_{Sophie/Delphine} = Mvt_{Sophie/vous} + Mvt_{vous/Delphine}$$

On appelle trajectoire du point P d'un solide (S) par rapport à une référence R l'ensemble des positions occupées successivement par ce point au cours du temps. Une trajectoire est donc représentée par une courbe.

Exemple

Sur l'exemple du vélo, on constate que les trajectoires sont différentes suivant les points considérés, le solide considéré et la référence.



Crédit photo: autorisation Cycles Lapierre

3 Concepts de base

Ces concepts sont valides qu'il s'agisse de la mécanique du **point matériel** ou de la mécanique du **solide**

- L'utilisation du P.F.D ¹ permet d'obtenir les accélérations (a_x , a_y et a_z). En primitivant une fois on obtient les vitesses et en primitivant une seconde fois, les positions.
- L'opération inverse est également possible, c'est à dire, à partir de la position d'un point matériel ou d'un solide, et en dérivant une fois, on obtient la vitesse et en dérivant une deuxième fois, on obtient l'accélération.

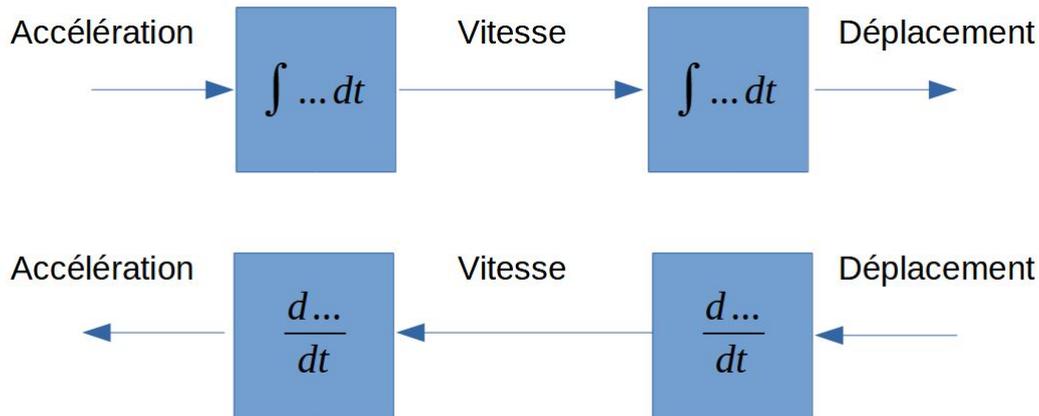


Figure 2: Concepts de base

4 Notations mathématiques et notations physiques

En mathématique	En ingénierie
$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + z^3$ $y' = 2 \cdot a \cdot x + b$ $y'' = 2 \cdot a$ <p>En mathématique, la plupart du temps, la variable de dérivation est « x ».</p> <p>Si les dérivées se font par rapport à la variable « z », les dérivées seraient les suivantes :</p> $y' = 3 \cdot z^2$ $y'' = 6 \cdot z$	<p>En ingénierie, il faut toujours préciser la variable de dérivation. La notation diffère donc de celle utilisée en mathématique.</p> $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + z^3$ $\frac{dy}{dx} = 2 \cdot a \cdot x + b$ $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \cdot a$
<p>En cinématique, la variable de dérivation sera le temps « t ». Le « x » des mathématiques est remplacé par « t »</p> $y = a \cdot t^2 + b \cdot t$ $\frac{dy}{dt} = 2 \cdot a \cdot t + b$ $\frac{d^2y}{dt^2} = 2 \cdot a$	
<p>Notation particulières des dérivées temporelles (dérivation par rapport à « t »)</p>	
$\frac{dy}{dt} = \dot{y}$ (se prononce « y point »)	$\frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}$ (se prononce « y deux points » ou « y point point »)

Figure 3: Différences entre la notations mathématique et la notation physique

¹Principe Fondamental de la Dynamique

5 Rappel cinématique du point matériel

La cinématique du point matériel s'intéresse uniquement à un point tel que le point « M » sur la figure 5 ou à un point tel que le centre de gravité G d'un solide.

La rotation du solide (si elle existe) n'est donc pas prise en compte ce qui peut nuire à l'analyse et engendrer des écarts quantitatifs dans le meilleur des cas et qualitatifs dans le pire des cas.

- Un bras pendulaire (tige en rotation) modélisé par une masse en son centre de masse ^a fournira des écarts quantitatifs mais assez proches de la réalité. La cinématique du **point matériel** peut suffire. . .
- Une boule de billard animée d'un moment de rotation lors de la percussion avec une autre boule fournira des écarts qualitatifs important si la boule est modélisée par une masse en son centre de masse. La cinématique du **point matériel ne suffira pas**, il faudra **passer par la cinématique du solide**.

^aCentre de gravité

5.1 Trajectoire d'un point et équation de trajectoire

Le point matériel M peut être situé dans différents repères (cartésien, cylindrique ou sphérique). Nous ne le situerons uniquement dans le repère cartésien (cf. figure 4)

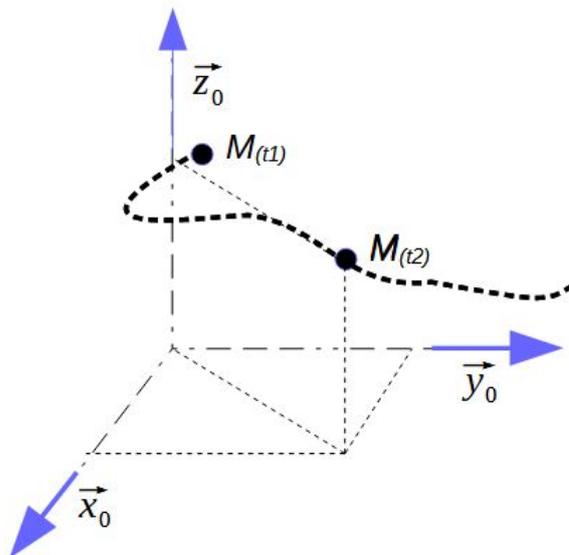


Figure 4: Trajectoire du point M

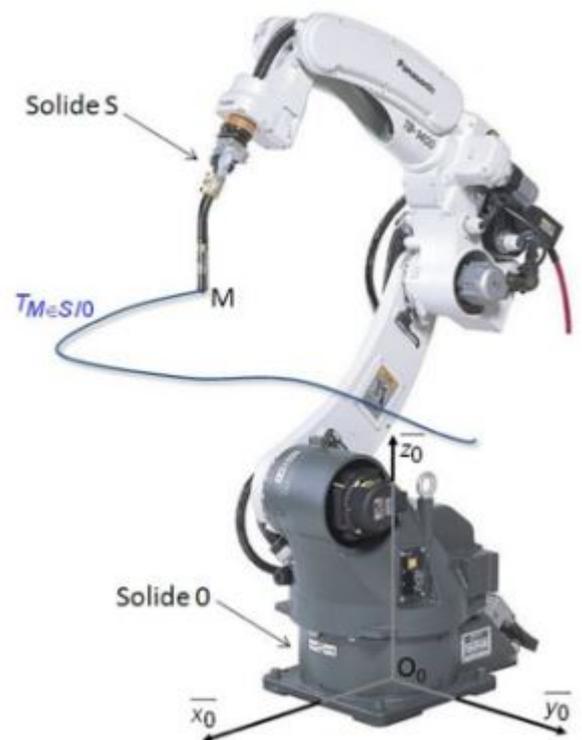


Figure 5: Robot de soudage

La trace en pointillés est la trajectoire du point M, notée $T_{M \in S/R}$ ou $T_{M \in S/0}$, trajectoire qu'il est aisé d'obtenir à partir des équations horaires en éliminant la variable *temps*.

5.2 Application : mouvements des solides et tracés de trajectoires

Le mécanisme « Bielle-manivelle » est particulièrement intéressant pour caractériser les trois types de mouvement.

Ce dispositif réalise la transformation du mouvement linéaire alternatif de l'extrémité de la bielle en un mouvement de rotation continu disponible sur la manivelle et vice-versa.

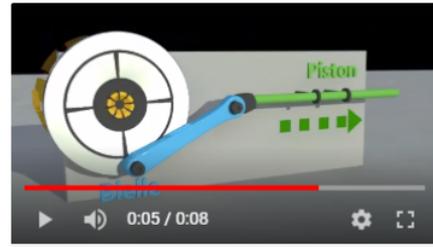
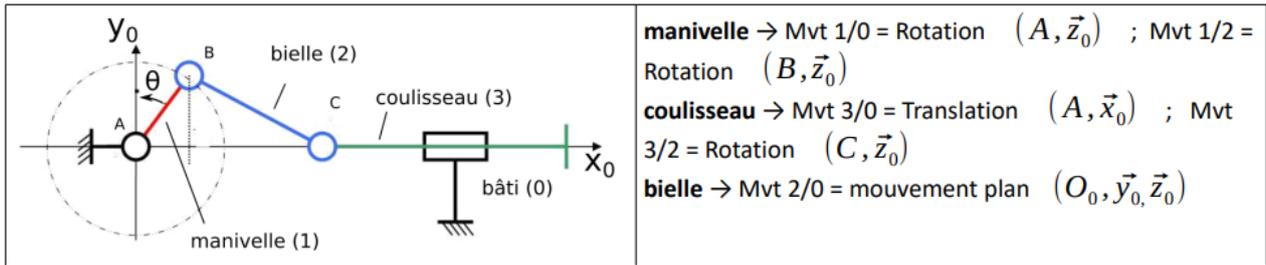


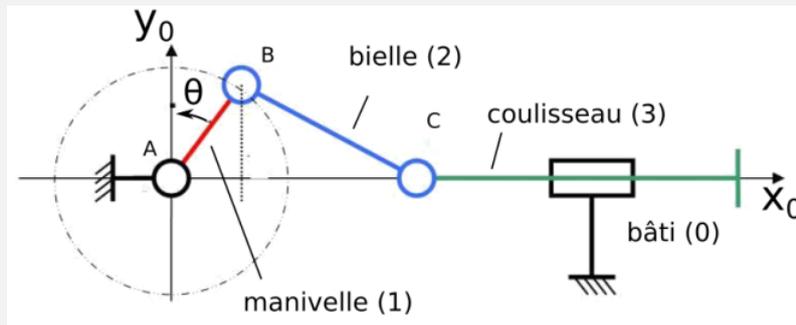
Figure 6: Vidéo Bielle-manivelle



Application : Tracer des trajectoires et vecteurs vitesses

Sur le mécanisme suivant, tracer les trajectoires et les vecteurs vitesses suivants :

- $T_{B \in 1/0}, T_{B \in 2/0}, T_{B \in 2/3}, T_{C \in 3/0}, T_{C \in 2/0}, T_{C \in 3/1}$.
- $\vec{V}_{B \in 1/0}, \vec{V}_{B \in 2/0}, \vec{V}_{B \in 1/0}, \vec{V}_{B \in 2/3}, \vec{V}_{C \in 2/0}, \vec{V}_{C \in 3/0}$,



5.3 Application : équation de trajectoire

Application : Déterminer l'équation de trajectoire d'un tir parabolique

Les composantes du vecteur position du projectile exprimées dans le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sont les suivantes :

$$\overrightarrow{OM(t)} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_0 \cdot \cos\theta \cdot t \\ -\frac{g \cdot t^2}{2} + V_0 \cdot \sin\theta \cdot t \\ 0 \end{pmatrix}$$

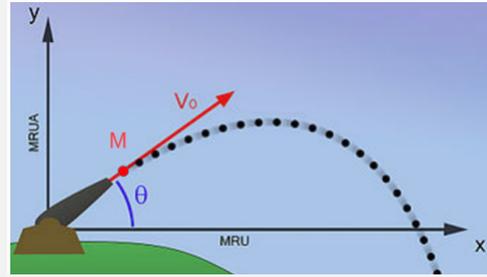


Figure 7: Tir parabolique

Données : $V_0 = 10 \text{ m/s}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ $\theta = 30$

- **Montrer** que l'équation de trajectoire est de la forme $y(x) = -\frac{x^2}{15} + \frac{x}{\sqrt{3}}$
- **Tracer** sur Geogebra ou la calculatrice graphique ou à la main la trajectoire du tir dans un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y})$.

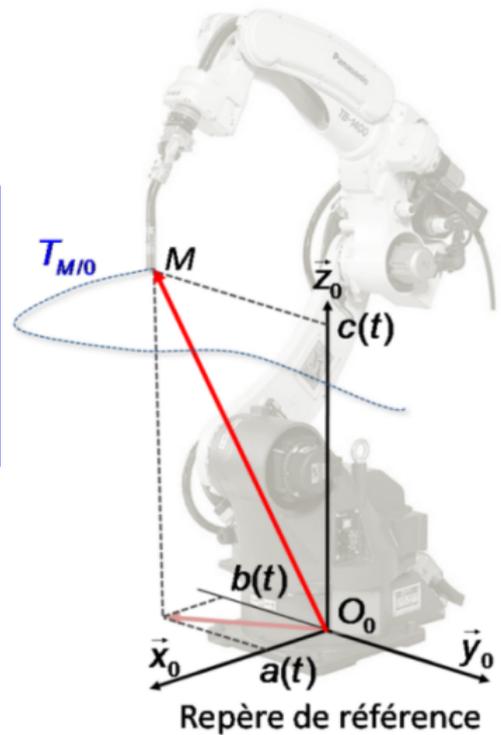
5.4 Vecteur position d'un point M en mouvement par rapport à R_0

Le vecteur position d'un point M appartenant à un solide S est le vecteur qui lie ce point M à l'origine O du repère de référence $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

Vecteur position à la date t

Écriture en ligne : $\overrightarrow{OM_{(t)}} = a_{(t)}\vec{x}_0 + b_{(t)}\vec{y}_0 + c_{(t)}\vec{z}_0$

Écriture en colonne : $\overrightarrow{OM_{(t)}} \begin{pmatrix} a_{(t)} \\ b_{(t)} \\ c_{(t)} \end{pmatrix}$



5.5 Vecteur vitesse d'un point M en mouvement par rapport à R_0

Important

Le vecteur vitesse, toujours **tangent à la trajectoire**, est la **dérivée**, par rapport au temps, du **vecteur position** dans le repère de référence.

Le vecteur vitesse du point M dans son mouvement par rapport à $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est défini par :

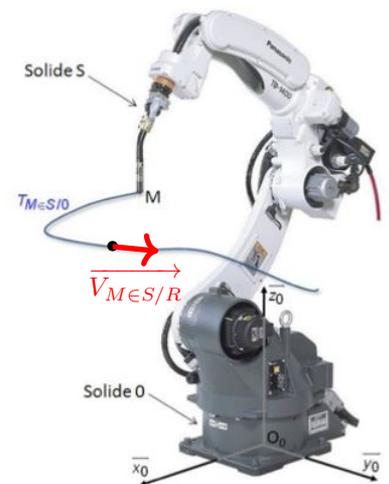
Vecteur vitesse à la date t

Définition : $\overrightarrow{V_{M \in S/R_0}} = \left. \frac{d\overrightarrow{OM_{(t)}}}{dt} \right]_{R_0}$

Par dérivation on obtient les composantes du vecteur vitesse :

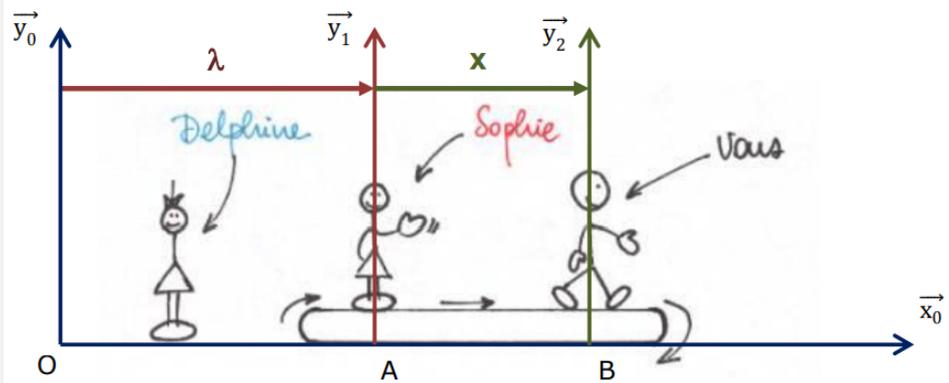
Écriture en ligne : $\overrightarrow{V_{M \in S/R}} = V_x \cdot \vec{x}_0 + V_y \cdot \vec{y}_0 + V_z \cdot \vec{z}_0$

Écriture en colonne : $\overrightarrow{V_{M \in S/R}} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$



Exemple : Translation sur un seul axe

Si on paramètre le système par un paramètre λ (attention λ est fonction du temps) pour **Sophie** (S) par rapport à **Delphine** (D) et x (attention x est fonction du temps) pour **Vous** (V) par rapport à Sophie (S)



Soit le point O appartenant à Delphine ($O \in Delphine$), le point A appartenant à Sophie ($A \in Sophie$) et le point B appartenant à "Vous" ($B \in Vous$) :

La vitesse de Sophie (S) par rapport à Delphine (D) s'écrit : $\vec{V}_{A \in S/D} = \left. \frac{d\vec{OA}}{dt} \right|_{R_0} = \dot{\lambda} \cdot \vec{x}_0$

La vitesse de Vous (V) par rapport à Sophie (S) s'écrit : $\vec{V}_{B \in V/S} = \left. \frac{d\vec{AB}}{dt} \right|_{R_1} = \dot{x} \cdot \vec{x}_0$

La vitesse de Vous (V) par rapport à Delphine (D) s'écrit : $\vec{V}_{B \in V/D} = \left. \frac{d\vec{OB}}{dt} \right|_{R_0} = (\dot{x} + \dot{\lambda}) \cdot \vec{x}_0$

5.6 Vecteur accélération d'un point M en mouvement par rapport à R_0

Le vecteur accélération $\Gamma_{M \in S/R_0}$ est la dérivée, par rapport au temps, du vecteur vitesse dans le repère de référence.

Le vecteur accélération du point M dans son mouvement par rapport à $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est défini par :

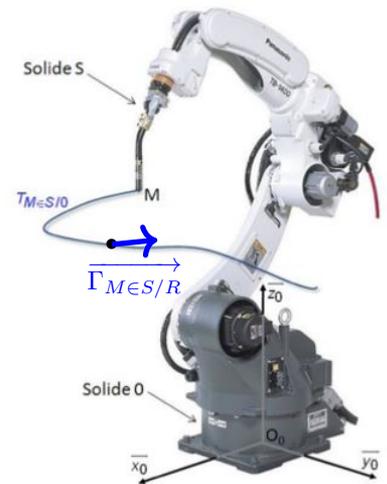
Vecteur accélération à la date t

Définition : $\vec{\Gamma}_{M \in S/R_0} = \left. \frac{d\vec{V}_{M \in S/R_0}}{dt} \right]_{R_0} = \left. \frac{d^2\vec{OM}(t)}{dt^2} \right]_{R_0}$

Par dérivation on obtient les composantes du vecteur vitesse :

Écriture en ligne : $\vec{\Gamma}_{M \in S/R_0} = a_x \cdot \vec{x}_0 + a_y \cdot \vec{y}_0 + a_z \cdot \vec{z}_0$

Écriture en colonne : $\vec{\Gamma}_{M \in S/R_0} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$



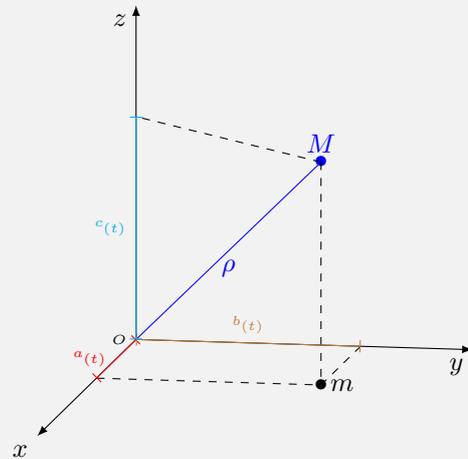
5.7 Application

Application : Détermination des vecteurs vitesse et accélération

Soit le point M dont on connaît les composantes du vecteur position \vec{OM} dans le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\vec{OM}_{(t)} \begin{pmatrix} a_{(t)} = 2t^2 - 1 \\ b_{(t)} = \frac{t^3}{3} + 2 \\ c_{(t)} = -t^3 + \frac{t^2}{5} \end{pmatrix}$$

Déterminer les vecteurs vitesses $\vec{V}_{M/R}$ et accélération $\vec{\Gamma}_{M/R}$



5.8 Vecteur vitesse instantanée de rotation

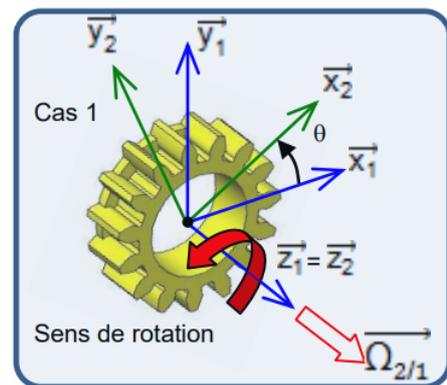
Pour une rotation d'un repère R_2 par rapport à R_1 autour de l'axe \vec{z}_1 repéré par le paramètre angulaire θ , le vecteur vitesse instantanée de rotation s'écrit :

Vecteur vitesse instantané de rotation

$$\vec{\Omega}_{2/1} = \dot{\theta} \cdot \vec{z}_1 = \dot{\theta} \cdot \vec{z}_2$$

$\vec{\Omega}_{2/1}$ est défini :

- Par sa direction, la direction de l'axe autour duquel R_2 tourne autour de R_1 .
- Par sa norme, la vitesse angulaire avec laquelle se fait cette rotation (unité : rad/s).
- Par son sens, le sens dans lequel se fait cette rotation.



5.9 Composition des vitesses

La composition des vitesses est valable pour les vitesses **translation** et de **rotation** mais attention ... **UNIQUEMENT EN EXPRESSION VECTORIELLE**;

5.9.1 Composition des vitesses en translation

Loi de composition de vitesse en translation

$$\vec{V}_{A \in 4/0} = \vec{V}_{A \in 4/3} + \vec{V}_{A \in 3/2} + \dots + \vec{V}_{A \in 1/0}$$

Remarque

Les indices ne sont pas forcément décroissants ...

$$\vec{V}_{A \in 4/0} = \vec{V}_{A \in 4/2} + \vec{V}_{A \in 2/3} + \vec{V}_{A \in 3/1} + \vec{V}_{A \in 1/0}$$

Exemple

Si on paramètre le système par un paramètre λ (attention λ est fonction du temps) pour **Sophie** (S) par rapport à **Delphine** (D) et x (attention x est fonction du temps) pour **Vous** (V) par rapport à Sophie (S)

$$\vec{V}_{B \in \text{Vous}/\text{Delphine}} = \vec{V}_{A \in \text{Vous}/\text{Sophie}} + \vec{V}_{A \in \text{Sophie}/\text{Delphine}}$$

5.9.2 Composition des vitesses en rotation

Loi de composition de vitesse en rotation

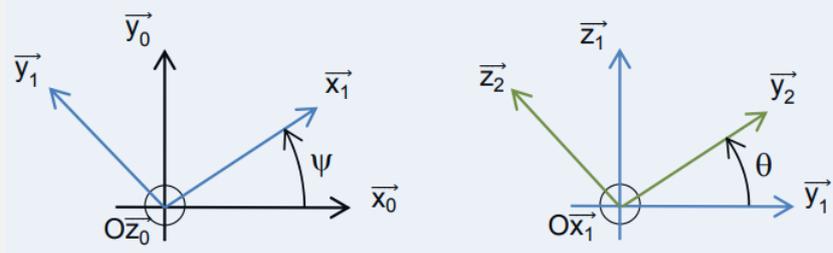
La composition des vitesses en rotation s'opère sur les vecteurs vitesses instantanés de rotation. $\vec{\Omega}_{4/0} = \vec{\Omega}_{4/3} + \vec{\Omega}_{3/2} + \dots + \vec{\Omega}_{1/0}$

Remarque

Comme pour la composition des vitesses en translation, en rotation également, les indices ne sont pas forcément décroissants ...

Exemple

Soit deux vecteurs vitesse instantanée de rotation $\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\psi} \cdot \vec{z}_0$ et $\vec{\Omega}_{2/1} = \dot{\theta} \cdot \vec{x}_1$



On montre que $\vec{\Omega}_{2/0} = \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0}$ et $\vec{\Omega}_{2/0} = \dot{\psi} \cdot \vec{z}_0 + \dot{\theta} \cdot \vec{x}_1$

5.10 Dérivation d'un vecteur tournant

Dériver un vecteur position dans le repère de référence (ici $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$) tel que \vec{OM} quand toutes les composantes sont exprimées dans le repère de référence est simple. Cela se complique dès que l'on doit dériver des composantes exprimées dans une autre base que celle de référence...Il faut apprendre à faire une dérivation vectorielle.

Soit le repère cylindrique suivant :

Il est aisé de déterminer le vecteur \vec{OM}

$$\vec{OM}_{(t)} = r \cdot \vec{u}_r + z \cdot \vec{u}_z$$

La dérivation dans la base $R_m(m, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{z})$ est aisée ... mais moins simple dans la base $R_o(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

Pour éviter de complexifier de trop, nous allons dériver dans le plan (O, x, y) en prenant pour exemple une roue de vélo (cf. figure 9).

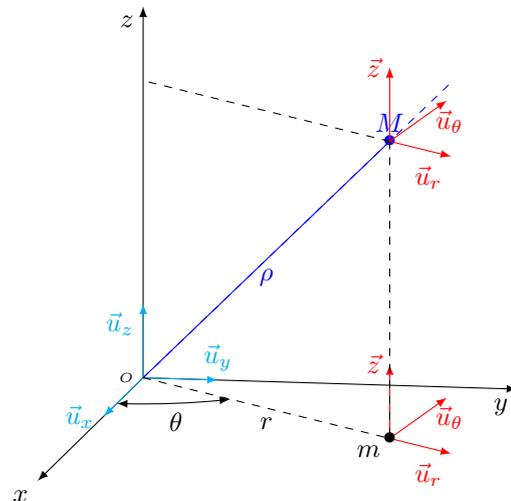


Figure 8: Repère cylindrique

Soit la roue de vélo sur la figure 9 pour laquelle on désire connaître les expressions des vecteurs positions, vitesses et accélérations du point A appartenant à la roue (1) par rapport au moyeu (0) de centre O.

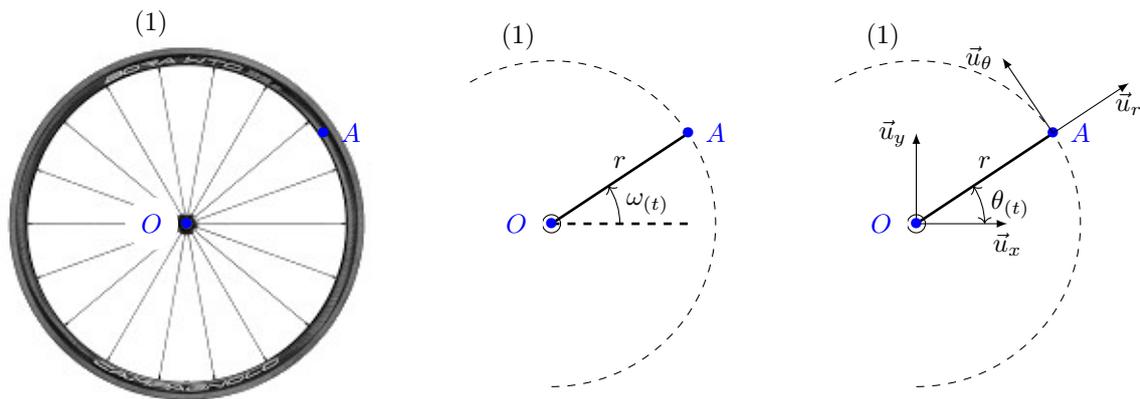


Figure 9: Modélisation cinématique d'une roue de vélo

La roue de vélo peut être modélisée dans un premier temps par la figure du centre. Le point A tourne autour de O à la vitesse $\omega(t)$.

Pour réussir à exprimer les vecteurs positions, vitesses et accélération, nous allons placer deux repères :

- Le premier repère $R_0(O, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ attaché au moyeu (0).
- Le deuxième repère $R_A(A, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ attaché à la roue (1) au point A.

Le repère $R_A(A, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ attaché au point A tourne à une vitesse $\omega(t)$ par rapport au repère $R_0(O, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$.

Vecteur position

Le vecteur position s'écrit :

$$\vec{OA} = r \cdot \vec{u}_r$$

Enchaînons avec l'expression du vecteur vitesse ...

$$\vec{V}_{A \in R_A / R_0} = \left. \frac{d\vec{OA}}{dt} \right|_{R_0} = \left. \frac{d(r \cdot \vec{u}_r)}{dt} \right|_{R_0} = r \cdot \left. \frac{d\vec{u}_r}{dt} \right|_{R_0} \text{ car } r \text{ est une constante.}$$

La difficulté ici est que le vecteur \vec{u}_r est tournant par rapport au repère R_0 !

Dérivation / Intégration d'un vecteur tournant

Nous admettrons sans démonstration que :

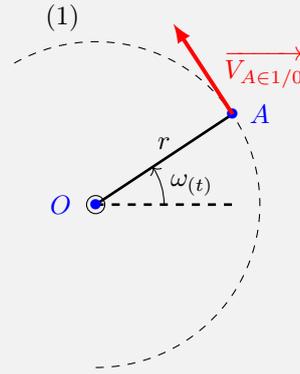
- **Dériver** un vecteur tournant introduit ...
 - une rotation de ce vecteur de $+\frac{\pi}{2}$ dans le sens trigonométrique
 - une multiplication par ce vecteur de la valeur $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$
- **Primitiver** un vecteur tournant introduit ...
 - une rotation de ce vecteur de $-\frac{\pi}{2}$ dans le sens trigonométrique
 - une division ce vecteur de la valeur $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$

En définitive, l'expression du vecteur vitesse est la suivante :

Vecteur vitesse

$$\vec{V}_{A \in R_A / R_0} = r \cdot \omega \cdot \vec{u}_\theta = r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta$$

On constate que le vecteur vitesse est bien tangent à la trajectoire !



Pour le vecteur accélération, il n'y a plus qu'à appliquer ce que l'on connaît déjà ...

$$\vec{\Gamma}_{A \in R_A / R_0} = \left. \frac{d(\vec{V}_{A \in R_A / R_0})}{dt} \right|_{R_0} = \left. \frac{d(r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta)}{dt} \right|_{R_0} = r \cdot \left. \frac{d(\dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta)}{dt} \right|_{R_0} \text{ car } r \text{ est une constante.}$$

$$\vec{\Gamma}_{A \in R_A / R_0} = r \left(\frac{d\dot{\theta}}{dt} \cdot \vec{u}_\theta + \dot{\theta} \cdot \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \right) = r \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta - r \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{u}_r$$

Autre façon d'y arriver ...

Autre façon d'y arriver ... c'est à vous !

Je ne vais quand même pas faire tout le boulot ! Reprendre l'expression du vecteur position $\vec{OA} = r \cdot \vec{u}_r$

$$\vec{\Gamma}_{A \in R_A / R_0} = \left. \frac{d^2 \vec{OA}}{dt^2} \right|_{R_0}$$

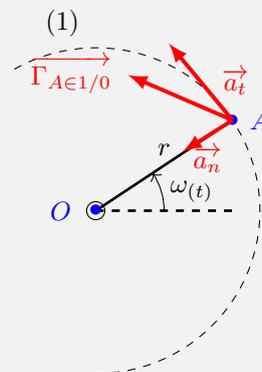
En définitive, l'expression du vecteur accélération est la suivante :

Vecteur accélération

$$\vec{\Gamma}_{A \in R_A / R_0} = r \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta - r \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{u}_r$$

On constate que le vecteur accélération possède éventuellement deux composantes :

- Une accélération tangentielle : $r \cdot \ddot{\theta}$ ou $r \cdot \alpha$ avec α l'accélération angulaire.
- Une accélération normale (ou centripète) : $r \cdot \dot{\theta}^2$ ou $r \cdot \omega^2$



En autre façon de dériver un vecteur est également utilisée et c'est cette manière qui est utilisée en cinématique du solide ...

Formule de dérivation vectorielle

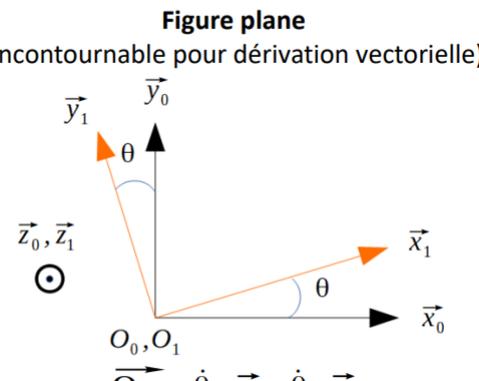
Soit un vecteur \vec{U} que nous devons dériver dans une base R_0 :

$$\left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{R_0} = \left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} \wedge \vec{U}$$

$\overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}}$ est le vecteur vitesse instantanée de rotation du repère R_1 par rapport au repère R_0

Dans notre cas nous n'utiliserons uniquement sur des **vecteurs unitaires** (c-à-d de normes égales à 1) ...

Finalement, ce qu'il faut retenir est le tableau suivant :

Cas des vecteurs fixes dans la base	
$\left. \frac{d\vec{x}_0}{dt} \right _{R_0} = \left. \frac{d\vec{y}_0}{dt} \right _{R_0} = \vec{0}$	
Cas des vecteurs en rotation par rapport à une autre base (ici R_0)	
<div style="border: 1px solid blue; border-radius: 15px; padding: 10px; display: inline-block;"> $\left. \frac{d\vec{x}_1}{dt} \right _{R_0} = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \vec{x}_1 = \dot{\theta} \cdot \vec{y}_1$ $\left. \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right _{R_0} = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \vec{y}_1 = -\dot{\theta} \cdot \vec{x}_1$ </div>	<p style="text-align: center;">Figure plane (incontournable pour dérivation vectorielle)</p>  <p style="text-align: center;">$\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\theta} \cdot \vec{z}_0 = \dot{\theta} \cdot \vec{z}_1$</p>

6 Cinématique du solide indéformable

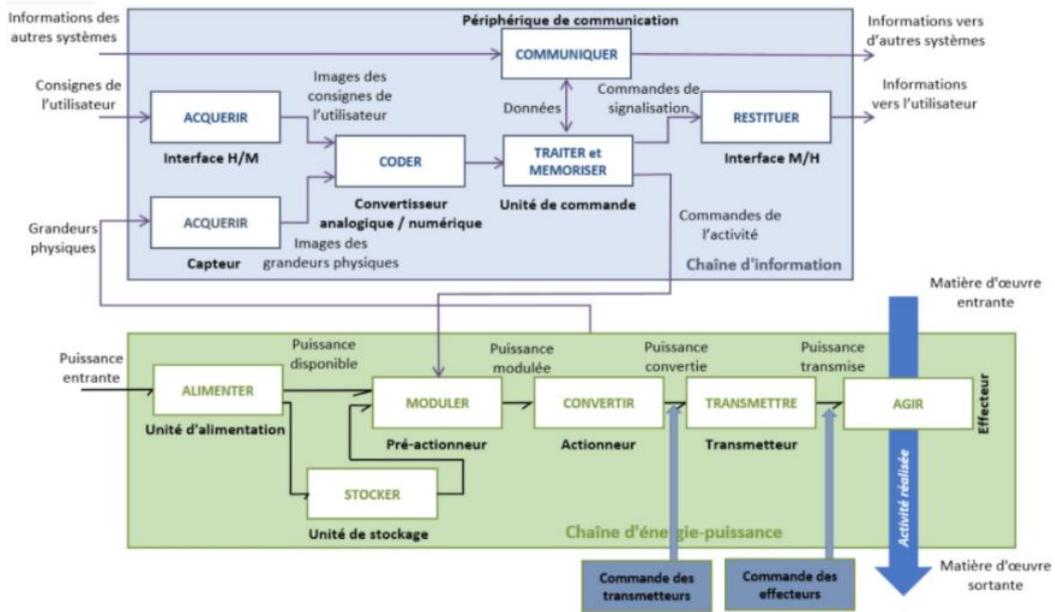
6.1 Pourquoi l'étude des mouvements des solides indéformables ?

Pour de nombreux systèmes (par exemple un robot chirurgical), un des principaux enjeux des concepteurs est de faire en sorte qu'ils respectent parfaitement la cinématique imposée par leur cahier des charges.



Figure 10: Robot chirurgical

L'objectif d'un ingénieur est de définir les lois de commande en mouvement à imposer aux transmetteurs de chaque chaîne d'énergie-puissance constituant le système.



6.2 Le schéma cinématique comme base de travail pour la cinématique du solide indéformable

Nous concernant, les « objets » seront pour majeure partie des mécanismes modélisés par des schémas cinématiques sur lesquels différents repères (R_0, R_1, R_2 , etc) seront posés afin de mener des calculs de cinématique.

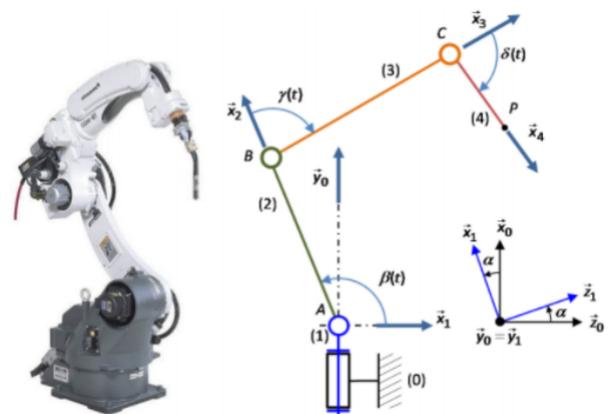
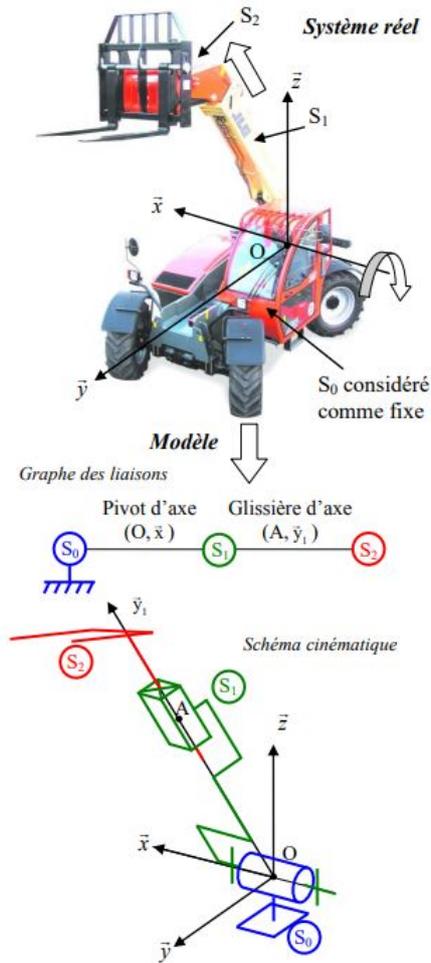
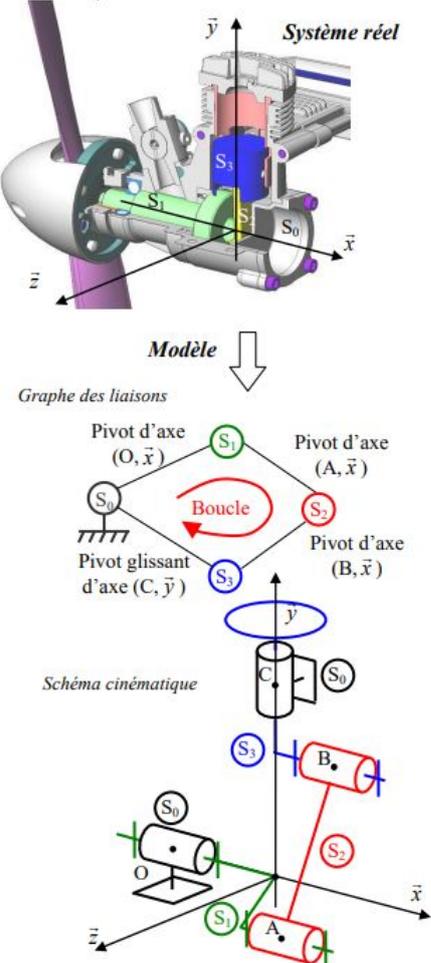


Figure 11: Exemple de schéma cinématique comme base de travail

Ces lois de commande sont de deux types en fonction des mécanismes rencontrés :

Chaîne ouverte	Chaîne fermée
 <p><i>Système réel</i></p> <p><i>Modèle</i></p> <p><i>Graphe des liaisons</i></p> <p>Pivot d'axe (O, \bar{x}) Glissière d'axe (A, \bar{y}_1)</p> <p>S_0 S_1 S_2</p> <p><i>Schéma cinématique</i></p>	 <p><i>Système réel</i></p> <p><i>Modèle</i></p> <p><i>Graphe des liaisons</i></p> <p>Pivot d'axe (O, \bar{x}) Pivot d'axe (A, \bar{x})</p> <p>S_0 S_1 S_2</p> <p>Boucle</p> <p>Pivot d'axe (B, \bar{x})</p> <p>Pivot glissant d'axe (C, \bar{y})</p> <p><i>Schéma cinématique</i></p>
<p>Les paramètres du mouvements sont tous indépendants. Chaque liaison est motrice.</p>	<p>Les paramètres du mouvements sont tous dépendants. Une seule liaison est motrice.</p>

6.3 Particularités de la cinématique du solide indéformable

La cinématique du **solide** est plus complexe que la cinématique du **point matériel** car pour un solide en mouvement, il peut y avoir plusieurs axe de rotation et pas forcément autour d'un axe précis d'un repère !

Cinématique du solide en Sciences de l'ingénieur

La cinématique du solide est essentiellement utilisée en Sciences de l'ingénieur pour analyser la cinématique des mécanismes que l'on prend soin de représenter au préalable par des **schémas cinématiques**.

Nous allons introduire un outil mathématique : **Le produit vectoriel.**

Différence entre cinématique du point et du solide indéformable

Nous avons déjà évoqué que lors de la cinématique du **point matériel**, le point est en mouvement de **translation**, **circulaire** ou **curviligne**. Jamais le **point matériel** ne tourne sur lui-même ou par rapport à un centre instantané de rotation (CIR). La cinématique du point suffit à l'étude d'un tel point matériel. Dès lors que l'objet tourne sur lui-même ou par rapport à un centre instantané de rotation voire se translate en même temps, il faut utiliser la cinématique du solide indéformable.

Exemple : Hélice d'avion

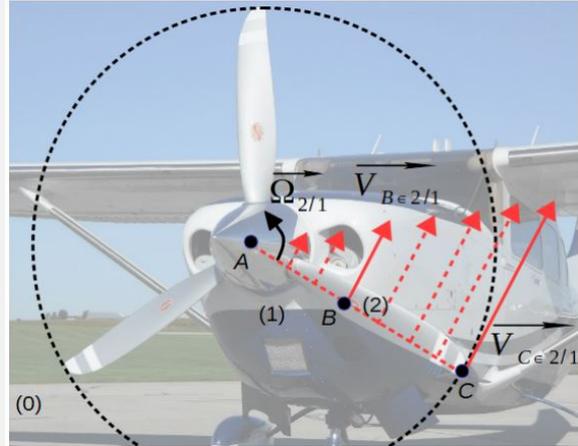
Dans l'exemple ci-contre, l'hélice de l'avion est un solide indéformable.

On voit donc apparaître (en rouge) ce que l'on appelle un champ de vecteurs.

Ce champ de vecteur peut être caractérisé par un outil mathématique : le **{Torseur}**.

Écriture du torseur $\{T_{2/1}\}$ au point B :

$$\{v_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ \overrightarrow{V_{B \in 2/1}} \end{Bmatrix}$$



Intérêt du Torseur : un torseur cinématique suffit à caractériser les champs de vecteurs d'un solide. Cela signifie que connaissant :

- la **Résultante** (ici $\overrightarrow{\Omega_{2/1}}$)²
- et le **Moment** (ici une vitesse en un point, par exemple en B, $\overrightarrow{V_{B \in 2/1}}$)

il est possible de déterminer tous les moments (ici les vitesses $\overrightarrow{V_{C \in 2/1}}, \dots$) en n'importe quel point.

6.4 Définition du torseur cinématique

Un solide peut être en translation, en rotation ou les deux à la fois. Un outils mathématique, le torseur noté entre accolades $\{\text{Torseur}\}$ permet de définir en tout point du solide les champs de vitesses du solide.

Écriture du torseur cinématique

Soit le torseur cinématique $\{v_{S/R}\}$ d'un solide (S) par rapport à un référentiel (R)

$$\{v_{S/R}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{B \in S/R}} \end{Bmatrix}_{P,R} = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & V_z \end{Bmatrix}_{P,R} = \begin{Bmatrix} \omega_x \cdot \vec{x} + \omega_y \cdot \vec{y} + \omega_z \cdot \vec{z} \\ V_x \cdot \vec{x} + V_y \cdot \vec{y} + V_z \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_P$$

Composantes de la résultante
Composantes du moment

Figure 12: Écriture du torseur cinématique

²appelé **Taux de rotation instantané** ou **Vecteur vitesse instantanée de rotation**

Dans la majorité des cas la rotation se fait dans un plan, la conséquence est la suivante :

$$\{v_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{1/0} \\ \vec{V}_{B \in 1/0} \end{Bmatrix}_{B, R_0} = \begin{Bmatrix} 0 & V_x \\ 0 & V_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{B, R_0} = \begin{Bmatrix} \omega_z \cdot \vec{z} \\ V_x \cdot \vec{x} + V_y \cdot \vec{y} \end{Bmatrix}_B$$

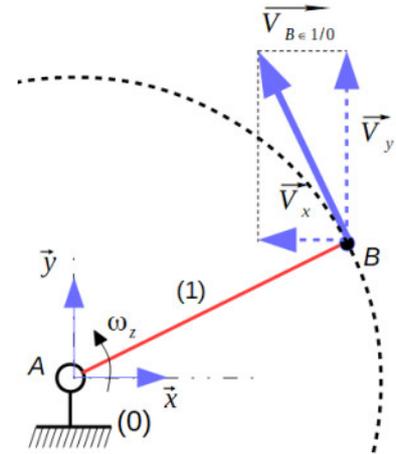
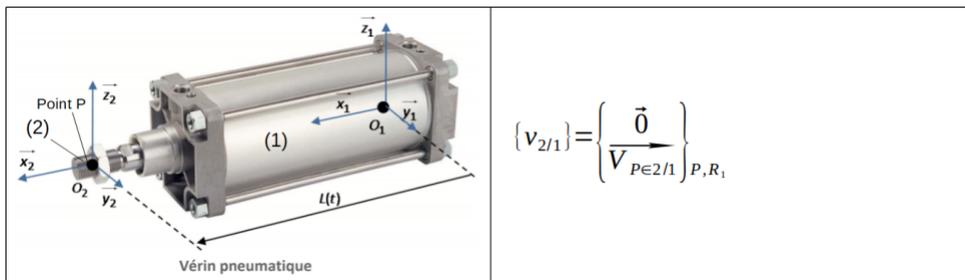


Figure 13: Écriture d'un torseur pour une rotation dans le plan

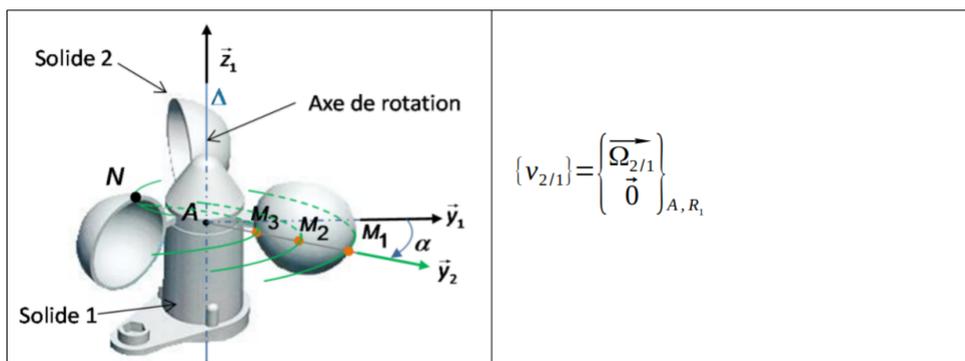
6.4.1 Cas d'une translation pure



$$\{v_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{V}_{P \in 2/1} \end{Bmatrix}_{P, R_1}$$

Figure 14: Écriture d'un torseur pour une translation pure

6.4.2 Cas d'une rotation pure



$$\{v_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{2/1} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{A, R_1}$$

Figure 15: Écriture d'un torseur pour une rotation pure

6.5 Centre instantané de rotation : CIR

La **position** du vecteur instantané de rotation est l'axe où se situe le vecteur vitesse instantanée de rotation $\vec{\Omega}$. Celui-ci n'est pas toujours fixe dans l'espace.

Exemple

Reprenons le cas de l'échelle qui glisse...

Figure 16: Centre instantané de rotation CIR de l'échelle

Méthode de détermination du CIR

- Tracer deux vecteurs vitesses à deux points différents du solide
- Tracer les perpendiculaires aux vecteurs à partir des deux points retenus
- Le CIR se trouve à l'intersection des deux perpendiculaire

Application CIR sur la bielle manivelle

Placer, sur le mécanisme bielle-manivelle à l'instant t correspondant à la figure, les centres instantanés de rotation des taux de rotation suivants :

- $\vec{\Omega}_{1/0}$
- $\vec{\Omega}_{2/1}$
- $\vec{\Omega}_{2/3}$
- $\vec{\Omega}_{2/0}$

6.6 Relation fondamentale de la cinématique

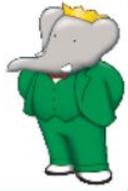
La relation fondamentale de cinématique du solide ou **relation de Varignon** permet à partir du Torseur cinématique d'un solide, de trouver la vitesse de translation en tout point de ce solide (la résultante étant invariante !)

Relation fondamentale de la cinématique du solide / Relation de Varignon

Relation fondamentale de la cinématique du solide / Relation de Varignon :

$$\vec{V}_{B \in S/R} = \vec{V}_{A \in S/R} + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}_{S/R}$$

BABAR (Ω est la résultante!)



6.7 Équiprojectivité des vitesses

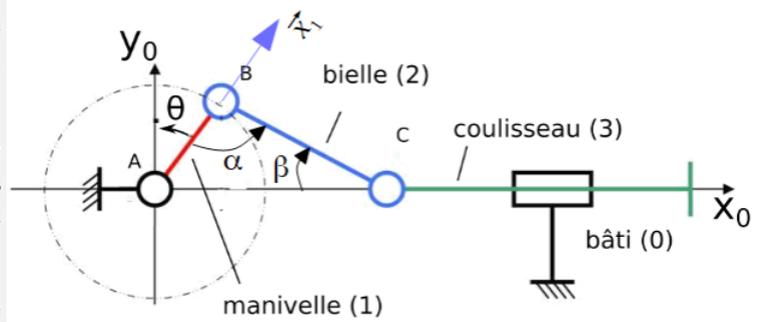
Dans certaines situation, il est difficile de déterminer le **vecteur vitesse instantané de rotation** ...

Mise en évidence de la nécessité d'utiliser l'équiprojectivité des vitesses

Objectif : Déterminer la vitesse du point C par rapport au bâti (0) en fonction de la vitesse de rotation de la manivelle, $V_{C \in 3/0} = f(\dot{\theta})$.

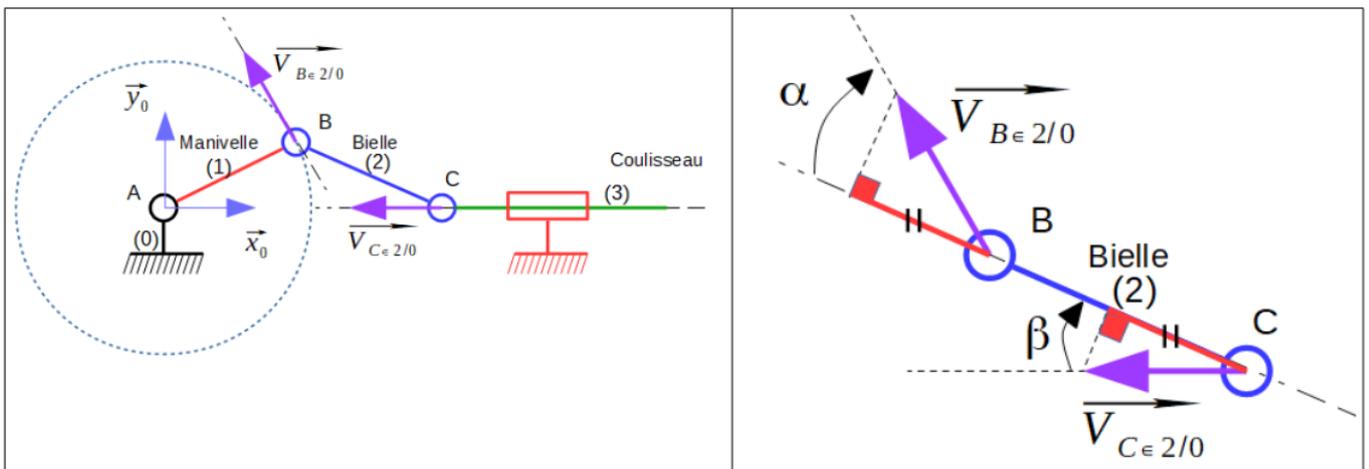
Il serait possible d'utiliser les concepts vus précédemment pour y parvenir à condition de connaître α' et β' ce que l'on ne connaît pas. Les trois angles sont liés.

L'objectif s'avère compliqué de cette manière !



Pour y parvenir, nous allons utiliser la **propriété d'équiprojectivité** des vecteurs vitesses appartenant à un même solide

Isolons la bielle :



En vertu de la propriété d'équiprojectivité, les deux segment rouge (noté de deux traits obliques) sont de même longueur. Connaissant $\vec{V}_{B \in 2/0}$ (déterminé par la relation de Varignon ou par dérivée du vecteur position \vec{AB}),

il est donc possible assez simplement de déterminer $\vec{V}_{C \in 2/0}$

relation d'équiprojectivité des vitesses

Il s'agit de réaliser un produit scalaire entre les vecteurs vitesses et la droite passant par le deux points considérés des vitesses ...

$$\vec{V}_{B \in 2/0} \cdot \vec{CB} = \vec{V}_{C \in 2/0} \cdot \vec{CB}$$

Ce qui revient à :

Ce qu'il faut retenir ...

$$\|\vec{V}_{B \in 2/0}\| \cdot \cos\alpha = \|\vec{V}_{C \in 2/0}\| \cdot \cos\beta$$

7 Application de la cinématique du solide indéformable

En guise de « fil conducteur » nous nous intéresserons à un hélicoptère CH53K (figure 17) dont un extrait de cahier des charges fonctionnel dans sa phase de vol en translation horizontale en régime établi (vitesse constante) par rapport au sol.



Figure 17: Hélicoptère CH53K

Exigence	Critère	Niveau
E1	Vitesse de déplacement	290 km/h

L'objectif est de vérifier que l'hélicoptère atteint le critère de vitesse de déplacement du cahier des charges sans que l'extrémité de ses pâles ne dépasse la vitesse du son (340 m.s^{-1}).

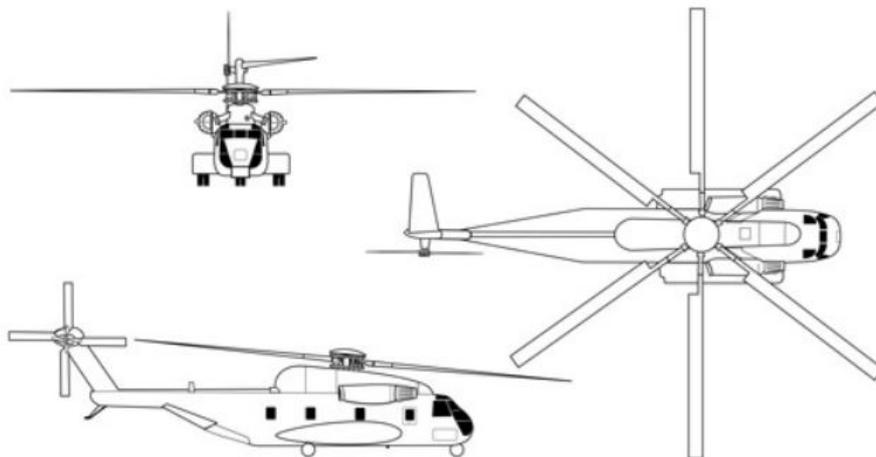
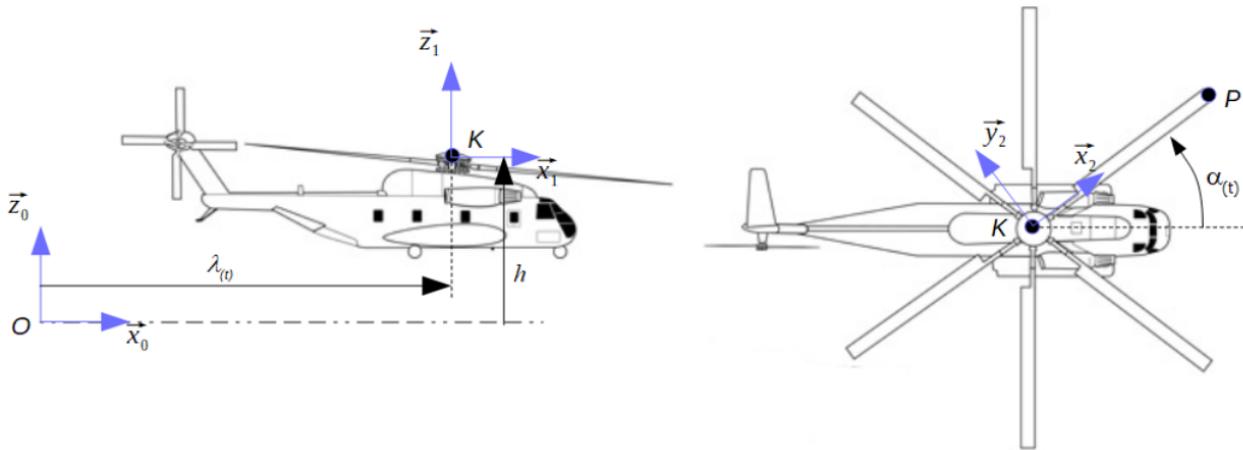


Figure 18: Photos profils hélicoptère

Dimensions

Longueur des pâles : 11 m
 Vitesse de rotation du rotor : 5200 tr.min^{-1}

7.1 Modélisation cinématique de l'hélicoptère et détermination du vecteur position



Bien que cela puisse paraître surprenant il est possible de modéliser l'hélicoptère par une liaison glissière et pivot à partir du moment où l'on fait l'hypothèse que celui ne se déplace qu'en translation rectiligne. Le schéma cinématique est paramétré de la manière suivante :

- Un repère $R_O(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ attaché au solide (0) (le bâti)
- Un repère $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2)$ attaché au solide (2) en translation et en rotation.

On donne : $\overrightarrow{KP} = R \cdot \vec{x}_2$

Figure 19: Modélisation cinématique de l'hélicoptère

Expression du vecteur position du point P par rapport au sol (0)

Donner l'expression du vecteur \overrightarrow{OP} $\overrightarrow{OP} =$

7.2 Détermination du vecteur vitesse

On sait qu'il faut dériver le vecteur position \overrightarrow{OP} pour obtenir le vecteur vitesse : $\overrightarrow{V_{P \in 2/0}} = \frac{d\overrightarrow{V_{P \in 2/0}}}{dt}$

Cependant il faut choisir la base de dérivation ! Ici on souhaite le vecteur vitesse par rapport au repère $R_O(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$, l'écriture précédente est donc insuffisante !

Il faut écrire : $\overrightarrow{V_{P \in 2/0}} = \left. \frac{d\overrightarrow{V_{P \in 2/0}}}{dt} \right|_{R_0}$

Remarque concernant la base de dérivation et l'expression des vecteurs utilisés

La base de dérivation permet de trouver l'expression d'un vecteur par rapport à cette base ! Cependant les **vecteurs unitaires utilisés** peuvent appartenir à une autre base... c'est ce que vous allez constater dans l'expression du vecteur vitesse.

Ce mécanisme étant très simple, il peut être traité par la cinématique du point matériel ainsi que la cinématique du solide indéformable. Nous allons le traiter dans par les deux manières ...

Détermination du vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{P \in 2/0}}$ avec les outils de **cinématique du point matériel** ainsi que sa norme ^a

$${}^a \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

$$\overrightarrow{V_{P \in 2/0}} =$$

Détermination du vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{P \in 2/0}}$ avec les outils de **cinématique du solide indéformable** ainsi que sa norme ^a

$${}^a \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

$$\overrightarrow{V_{P \in 2/0}} =$$

7.3 Détermination du vecteur accélération

La composition des accélérations n'étant pas abordée dans ce cours, nous ne traiterons l'accélération qu'avec les outils de cinématique du point matériel.

Détermination du vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma_{P \in 2/0}}$ avec les outils de **cinématique du point matériel** ainsi que sa norme ^a

$${}^a \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

$$\overrightarrow{\Gamma_{P \in 2/0}} =$$

8 Torseurs cinématiques des liaisons mécaniques

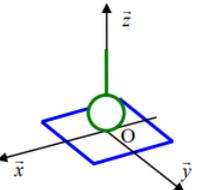
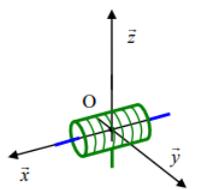
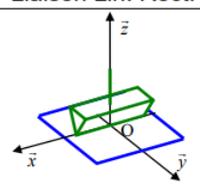
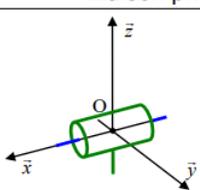
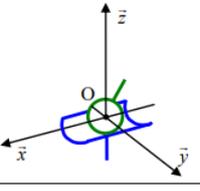
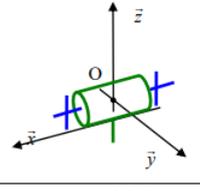
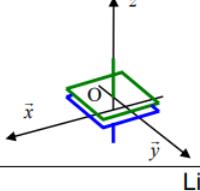
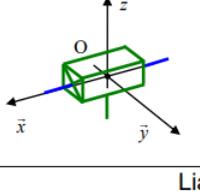
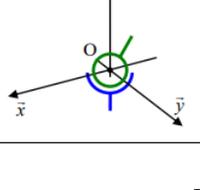
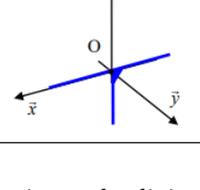
Liaison ponctuelle en O de normale (O, \vec{z})		Liaison hélicoïdale d'axe (O, \vec{x})	
	$O \begin{pmatrix} \Omega_x v_x \\ \Omega_y v_y \\ \Omega_z 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$		$O \begin{pmatrix} \Omega_x v_x \\ 0 0 \\ 0 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$ + 1 relation de dépendance
Liaison Lin. Rect. d'axe (O, \vec{x}) et de normale (O, \vec{z})		Liaison pivot glissant d'axe (O, \vec{x})	
	$O \begin{pmatrix} \Omega_x v_x \\ 0 v_y \\ \Omega_z 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$		$O \begin{pmatrix} \Omega_x v_x \\ 0 0 \\ 0 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
Liaison linéaire annulaire d'axe (O, \vec{x})		Liaison pivot d'axe (O, \vec{x})	
	$O \begin{pmatrix} \Omega_x v_x \\ \Omega_y 0 \\ \Omega_z 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$		$O \begin{pmatrix} \Omega_x 0 \\ 0 0 \\ 0 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
Liaison appui plan de normale (O, \vec{z})		Liaison glissière d'axe (O, \vec{x})	
	$O \begin{pmatrix} 0 v_x \\ 0 v_y \\ \Omega_z 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$		$O \begin{pmatrix} 0 v_x \\ 0 0 \\ 0 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
Liaison rotule en O		Liaison complète	
	$O \begin{pmatrix} \Omega_x 0 \\ \Omega_y 0 \\ \Omega_z 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$		$O \begin{pmatrix} 0 0 \\ 0 0 \\ 0 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

Figure 20: Tableau des torseurs cinématiques des liaisons mécaniques